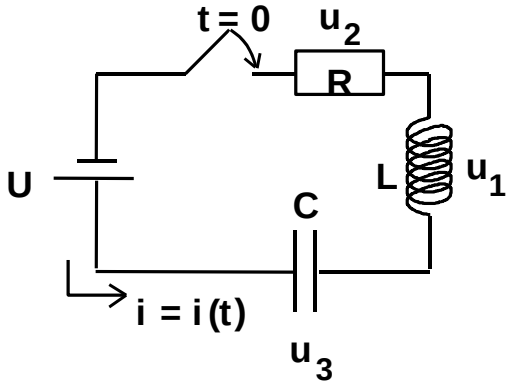
**Antti Majaniemi**

# MATEMATIIKKA II

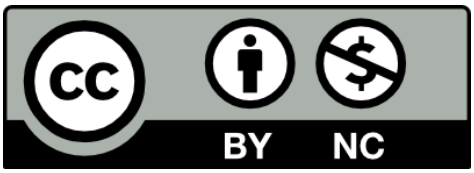
## Differentiaali- ja integraalilaskentaa sekä differentiaaliyhtälöitä




$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt = U$$

2016

ISBN 978-952-93-8168-5



Tämä teos on lisensoitu Creative Commons Nimeä-EiKaupallinen 4.0 Kansainvälinen -lisenssillä. Tarkastele lisenssiä osoitteessa http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/deed.fi.

Antti Majaniemen perikunta on päättänyt antaa tämän teoksen käytettäväksi yllä olevalla lisenssillä. Painatus ei ollut enää kannattavaa alhaisen kysynnän vuoksi, mutta tällä tavalla oppimateriaali on edelleen opiskelijoiden ja oppilaitosten käytettävissä.

Tämä teos on ladattavissa osoitteessa http://anttimajaniemi.fi

Turussa 20.11.2016

Jari Majaniemi

jari @ anttimajaniemi.fi

## SISÄLLYS

**1 Differentiaaliyhtälöistä 1**
1.1 Peruskäsitteitä 1
1.2 Mekaniikan ja lujuusopin esimerkki 2
1.3 Muuttujien erottaminen 4
1.4 Lineaarinen 1. kertaluvun DY 7
1.5 Virtapiirisovellus 11

**2 Toisen kertaluvun DY 16**
2.1 Vakiokertoiminen lineaarinen toisen kertaluvun DY 16
2.2 Esimerkkejä 17
2.3 Sovelluksia 20

**3 Trigonometristen funktioiden käänteisfunktiot 30**
3.1 Käänteisfunktio ja sen derivaatta 30
3.2 Arkusfunktiot 31
3.3 Integroimismenetelmiä. Areafunktiot 34

**4 Murtofunktion integrointi 39**
4.1 Perustapauksia 39
4.2 Osamurtoihin jako 40

**5 Trigonometristen funktioiden integrointi 45**
5.1 Perustapauksia 45
5.2 Tulot $\sin ax \cos bx$ , $\sin ax \sin bx$, $\cos ax \cos bx$ 45
5.3 Potenssilausekkeen $\sin^m x \cos^n x$ integrointi 46
5.4 Sijoituksia 47

**6 Irrationaalifunktioiden integrointi 49**

**7 Eksponentti-, logaritmi- ja hyperbelifunktiot 52**
7.1 Eksponenttifunktioiden integrointitapoja 52
7.2 Logaritmifunktioiden integrointitapoja 53
7.3 Hyperbelifunktiot 53

**8 Lisää integraalien sovelluksia 57**
8.1 Funktion keskiarvo välillä [a,b] 57
8.2 Kaaren pituus 58
*8.3 Pyöräyspinnan ala 58
8.4 Työintegraali 59
8.5 Epäolennainen integraali 60

**9 Käyriä koskevia tuloksia 63**
9.1 Kertaus 63
*9.2 Kaaren painopiste 63
9.3 Ratkaisemattoman funktion derivointi 64

9.4 Parametrimuotoisen funktion derivointi 65
9.5 Parametrikäyrän kaaren pituus ja vastaavan alueen ala 67
9.6 Käyrän kaarevuus 67
9.7 Käyrä napakoordinaatistossa 70
*9.8 Kaaren pituus ja pinta-ala napakoordinaatistossa 71

***10 Integraalin derivointi parametrin suhteen 76**
10.1 Parametri integroimisrajoissa 76
10.2 Parametri integroitavassa funktiossa 77

**11 Numeerisia menetelmiä 79**
11.1 Haarukointi ja iterointi (kertaus) 79
11.2 Newtonin menetelmä (tangenttimenetelmä) 80
11.3 Numeerinen derivointi 81
11.4 Numeerinen integrointi suorakulmiomenetelmällä 83
11.5 Puolisuunnikasmenetelmä 84
11.6 Simpsonin sääntö 85

**Vastauksia 89**

Monisteen tässä osassa käsitellään differentiaaliyhtälöitä (luvut 1 ja 2), arkusfunktioita (luku 3), integroimistekniikkaa (luvut 4...7) sekä erilaisia derivointiin ja integrointiin liittyviä kysymyksiä, joita voidaan opettaa valikoiden, linjakohtaisesti.

Integrointitekniikan osuutta voidaan keventää ja korvata paikoitellen matemaattisten tietokoneohjelmien käytöllä sen mukaan, mitä ohjelmia on käytettävissä ja minkä opintosuunnan opetus on kyseessä. Opintosuunnan tulisi vaikuttaa myös diff. yhtälöiden sovellusten valintaan. Diff. yhtälöitä käsitellään monisteen seuraavan osan loppupuolella jonkin verran numeerisesti ja Laplace-muunnoksilla.

Tässä painoksessa olen jatkanut monisteen muokkaamista ja korjailua. Lähinnä olen yrittänyt parantaa kuvien ulkoasua muuttamalla kuvissa viivoja paksummiksi ja kirjaimia lihavoiduiksi ja kursiiviksi. Toivon että monisteen kaikenlaisten puutteiden paikallistamisessa saan muiden opettajien apua kuten tähänkin asti.

Turussa 25.7. 1998 Antti Majaniemi

Olen päivittänyt monistetta korjaten sitä tämän päivän tilanteeseen paremmin sopivaksi.

Turussa 14.7.2008 Jari Majaniemi

# 1 Differentiaaliyhtälöistä

## 1.1 Peruskäsitteitä

Yhtälöä, jossa esiintyy tuntemattoman funktion ainakin yksi derivaatta, sanotaan ***differentiaaliyhtälöksi***, esim.

$$y' + 2xy = \sin x, \quad y'' + 3y' - 2y = x^2 + 1.$$

Jatkossa käytetään lyhenteitä diff.yhtälö tai DY.

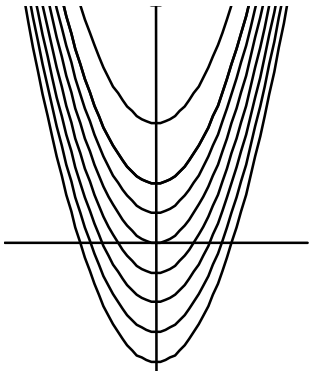
**Esim. 1** Ratkaise DY

$$y' - 2x = 0.$$

Tehtävä on sama kuin kaikkien sellaisten funktioiden etsiminen, joiden derivaatta on $2x$. Näin yksinkertainen DY ratkeaa *suoraan integroimalla*:

$y' = 2x \quad \Big|$ integroidaan

$$y = \int 2x\, dx = x^2 + C.$$



Koska $C$ voi olla mikä reaaliluku tahansa, tällä DY:llä on äärettömän monta ratkaisua. Ratkaisufunktiot $y = x^2 + C$ muodostavat yhdessä DY:n ***yleisen ratkaisun***, joka on geometrisesti eräs paraabeliparvi.

DY:ssä voi olla mukana myös jokin ***alkuehto***, esim. ehto

$y(2) = 3 \;\; eli \;\; \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ (lue: ***"kun x = 2, niin y = 3"***).

Tämä alkuehto määrää integroimisvakion suuruuden ts. valitsee ratkaisuparvesta yhden funktion (paraabelin):

$$y = x^2 + C \;\; \Big| \;\; alkuehto \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}.$$

$3 = 2^2 + C \;\; \therefore C = -1 \;\; \therefore y = x^2 - 1$

Ratkaisu $y = x^2 - 1$ on tämän DY:n eräs ***yksityisratkaisu***.

**Esim. 2** Eräässä suoraviivaisessa liikkeessä nopeus $v$ muuttuu ajan $t$ funktiona seuraavan lain mukaisesti:

$$(t+1)\cdot v(t) - 2t = 1,\ t \geq 0$$

Laske matkan $s(t)$ lauseke, kun hetkellä $t = 1$ kappale on kohdassa $s = 3$, ts. $s(1) = 3$. Aikaisemman mukaan $\boldsymbol{v = s'(t)}$:

$$v = s'(t) = \frac{2t+1}{t+1} \ \Big|\ \text{integr.}$$

$$s(t) = \int \frac{2t+1}{t+1}\,dt \ \Big|\ \text{suor. jako jakokulmassa tai seuraavasti:}$$

$$= \int \frac{(2t+2)-1}{t+1}\,dt = \int (2 - \frac{1}{t+1})\,dt == 2t - \ln|t+1| + C.$$

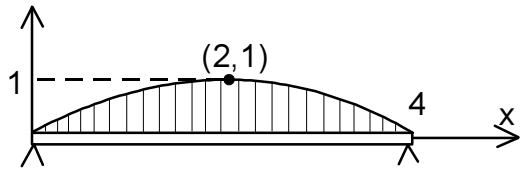
Itseisarvot ovat tarpeettomat, koska $t \geq 0$.

$$\text{Alkuehto: } \begin{cases} t = 1 \\ s = 3 \end{cases} \Rightarrow 3 = 2 - \ln 2 + C \Rightarrow C = 1 + \ln 2$$

$$\therefore s(t) = 2t - \ln(t+1) + 1 + \ln 2.$$

## 1.2 Mekaniikan ja lujuusopin esimerkki

**Esim. 3** Kummastakin päästään tuetun palkin pituus on 4 ($m$) ja sitä kuormittaa kuvan mukainen paraabelikuorma. Paraabelin yhtälö on muotoa




$$y - 1 = a(x-2)^2 \ \Big|\ (0,0) \text{ toteuttaa}$$

$$-1 = a(-2)^2 \therefore a = -\tfrac{1}{4} \therefore \text{paraabeli on } y = 1 - \tfrac{1}{4}(x-2)^2.$$

Kuormitustiheys $q(x)$ (kuorma/pituusyks.) on siis

$$q(x) = 1 - \tfrac{1}{4}(x-2)^2 \qquad (\text{esim. } q(2) = 1).$$

1) Mekaniikan mukaan ***taivutusmomentti*** $\boldsymbol{M_t(x)}$ kohdassa $x$ on sellainen, että sen 2. derivaatta on $-q(x)$. Tästä tulee taivutusmomentille *2. kertaluvun* DY, jonka ratkaiseminen vaatii kaksi

integrointia. Siten yleiseen ratkaisuun tulee kaksi integroimisvakiota. Laskut ovat seuraavat:

$$\mathbf{M_t(x)'' = -q(x) = -1 + \tfrac{1}{4}(x-2)^2} \quad \Big| \text{ integr.}$$

$$M_t(x)' = \int (-1 + \tfrac{1}{4}(x-2)^2)\,dx = -x + \tfrac{1}{12}(x-2)^3 + C_1 \quad \Big| \text{ integr.}$$

$$M_t(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{48}(x-2)^4 + C_1 x + C_2.$$

*Koska integroimisvakioita on 2 kappaletta, tarvitaan 2 alkuehtoa, jotta niille määräytyisivät jotkin arvot.*

Alkuehdot: Kummassakin päässä taivutusmomentti on = 0, ts.

$$M_t(0) = M_t(4) = 0 \;\; eli \;\; \begin{cases} x = 0 \\ M_t = 0 \end{cases} ja \begin{cases} x = 4 \\ M_t = 0 \end{cases}.$$

Kun 1. alkuehto sijoitetaan $M_t(x)$:n lausekkeeseen, saadaan

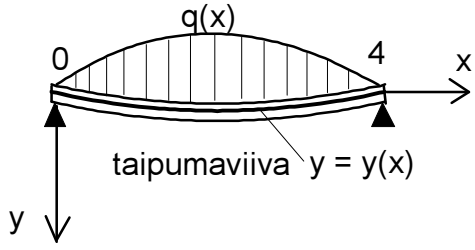
$$0 = 0 + \tfrac{1}{48}(-2)^4 + 0 + C_2 \;\therefore C_2 = -\tfrac{1}{3}.$$

Sitten 2. alkuehto antaa yhtälön

$$0 = -\tfrac{1}{2}\cdot 4^2 + \tfrac{1}{48}\cdot 2^4 + C_1 \cdot 4 - \tfrac{1}{3} \;\therefore C_1 = 2$$

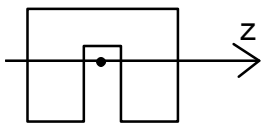
$$\mathbf{\therefore M_t(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{48}(x-2)^4 + 2x - \tfrac{1}{3}.}$$

2) Lujuusopin mukaan, jos taipuma on pieni, palkin ***taipumaviivan*** $\boldsymbol{y = y(t)}$ toinen derivaatta on yhteydessä taivutusmomenttiin seuraavan DY:n mukaisesti:




$$\boldsymbol{y''(x) = -\frac{M_t}{EI}},$$

missä $E$ ja $I$ ovat vakioita ($E$ = aineen kimmovakio ja $I$ on palkin poikkileikkauksen neliömomentti poikkileikkauksen painopisteen kautta kulkevan vaakasuoran akselin ($z$) suhteen).




Jos tähän taipumaviivan diff.yhtälöön sijoitettaisiin edellä laskettu taivutusmomentin lauseke ja suoritettaisiin kaksi

integrointia sekä käytettäisiin alkuehtoja: $y(0) = y(4) = 0$ (ts. tukien kohdalta palkki ei taivu), saataisiin taipumaviivan lauseke $y(x)$. Maksimitaipuma saataisiin tässä esimerkissä palkin keskellä, ts. laskemalla $y(2)$.

## 1.3 Muuttujien erottaminen

Edellä käsitellyt DY:t olivat sellaisia, että ne voitiin muuttaa muotoon

$$y' = u(x)\ , y'' = u(x),\ \ y''' = u(x), \ldots$$

eli muotoon, jossa jonkin kertaluvun derivaatta = ainoastaan $x$:n lauseke. Mikäli tämä lauseke sisältää myös tuntemattoman funktion $y$, *suora integrointi ei käy*. Jos tällainen DY on 1. kertalukua ts. korkein derivaatta on $y'$, DY saattaa ratketa ***erottamalla muuttujat***. Tässä menetelmässä käytetään lähtökohtana tietoa

$$\boldsymbol{y' = \frac{dy}{dx}} \text{ (= differentiaalien osamäärä)}.$$

**Esim. 4** $y' = 2xy \quad \left| \boldsymbol{y' = \frac{dy}{dx}} \right.$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \quad \left| \text{erotetaan muuttujat } (y\text{:t vasemmalle, } x\text{:t oikealle}) \right.$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{y}} = 2x \cdot dx \quad \left| \text{integroidaan kumpikin puoli} \right. \qquad (y \neq 0)$$

$$\int \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{y}} = 2\int x\ dx$$

$$\ln|y| = x^2 + C_1 \quad \left| \text{yleisesti } \ln z = a \Rightarrow z = e^a \right.$$

$$|y| = e^{x^2 + C_1} \quad \left| \quad |z| = \mathrm{a} \Rightarrow z = \pm a \right.$$

$$y = \pm e^{x^2 + C_1} \quad \left| \quad \mathrm{e}^{\mathrm{a+b}} = e^a \cdot e^b = e^b \cdot e^a \right.$$

$$= (\pm e^{C_1}) \cdot e^{x^2} \quad \left| \begin{array}{l} \pm e^{C_1} \text{ kulkee kaikki pos. ja neg. luvut} \\ \therefore \text{ voidaan merkitä } \pm e^{C_1} = C \end{array} \right.$$

$$\therefore \boldsymbol{y = Ce^{x^2}} \quad \text{(myös ratkaisu } y = 0 \text{ on mukana).}$$

Huomaa, että edellisellä DY:llä integrointivakio ei tullut ratkaisun perään lisätermiksi: $y = e^{x^2} + C$, vaan kertoimeksi eteen: $y = Ce^{x^2}$. Näiden kahden funktioparven kuvaajat eivät ole samanlaisia. Edellisessä parvessa on

funktio $y = e^{x^2}$, jota siirretään $C$:n arvon avulla ylös- ja alaspäin. Jälkimmäisen parven funktiot nousevat sitä jyrkemmin, mitä suurempi $C$-kerroin on.

**Esim. 5** $xy' - 2y = 0$ | suora integrointi ei käy. Kokeillaan muuttujien erottamista

$$x\frac{dy}{dx} = 2y \quad \Big| \text{ erotetaan muuttujat ja integroidaan}$$

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = 2 \cdot \ln|x| + C_1 = \ln x^2 + C_1$$

$$y = \pm e^{\ln x^2 + C_1} = \pm e^{C_1} \cdot e^{\ln x^2} \quad \Big| \text{yleisesti } e^{\ln a} = a$$

$$\therefore \boldsymbol{y = Cx^2}.$$

Aina ei edellisen tapaista integroimisvakion vaihtamista tarvita:

**Esim. 6** $y' + 2xy^2 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -2xy^2$$

$$-\int \frac{dy}{y^2} = \int 2x\, dx$$

$$\frac{1}{y} = x^2 + C \therefore y = \frac{1}{x^2 + C}.$$

Muuttujien erottaminen onnistuu, jos DY voidaan muuttaa tulo- tai osamäärämuotoon, esim. $u(x)\frac{dy}{dx} = v(y)$. Sen sijaan esim. DY:ssä $\frac{dy}{dx} = x + y$ muuttujia ei pystytä erottamaan (yritä!).

Useat eksponentti- tai logaritmilait ovat peräisin Esimerkin 4 tapaisista DY:istä. Tällaisia ovat esim. aineen radioaktiivisuuden tai mikrobien määrän väheneminen, bakteerikannan kasvu tai solujen määrän lisääntyminen solun jakautumisessa, lämmön tasaantuminen kappaleen ja ympäristön välillä jne. Seuraavasta näkyy, miten tällaisissa tapauksissa joudutaan diff.yhtälöihin.

**Esim. 7** Tarkastellaan ainetta, jota alussa on määrä $m_o$, mutta joka vähenee vähitellen (esim. muuttuu toiseksi aineeksi tai "väsyy" tai radioaktiivisuus häviää, mikrobit häviävät tms.).

Hetkellä $t$ ainetta on jäljellä enää määrä m(t). Jos tästä hetkestä mennään pieni aika $\Delta t$ eteenpäin hetkeen $t + \Delta t$, niin ainemäärän muutos $\Delta m$ (joka on negatiivinen) on verrannollinen

1) aikavälin pituuteen, jos aikaväli on hyvin pieni (esimerkiksi, jos ainetta häviää 1 millisekunnissa tietty määrä, niin 2 *ms*:ssa sitä häviää kaksinkertainen määrä),

2) jäljellä olevaan ainemäärään (jos esim. 1 *g*:sta häviää tietty määrä, niin 2 *g*:sta häviää kaksinkertainen määrä).

Siis $\Delta m = k \cdot m \cdot \Delta t$. Koska $\Delta m < 0, \textit{mutta } m > 0 \textit{ ja } \Delta t > 0$, niin verrannollisuuskerroin $k < 0$. Merkitään $k = -\lambda$, jolloin $\lambda > 0$.

$$\therefore \Delta m = -\lambda \cdot m \cdot \Delta t,$$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = -\lambda \cdot m.$$

Kun $\Delta t \to 0$, tämä yhtälö muuttuu diff.yhtälöksi

(1) $\quad \dfrac{dm}{dt} = -\lambda \cdot m \quad \big|$ erotetaan muuttujat ja integroidaan

$$\int \frac{dm}{m} = -\lambda \int dt$$

$$\ln m = -\lambda t + C \text{ (itseisarvoja ei tarvita, koska } m > 0).$$

Alussa ainetta oli jäljellä määrä $m_o$, ts. alkuehtona on

$$\begin{cases} t = 0 \\ m = m_o \end{cases} \Rightarrow \ln m_o = 0 + C \Rightarrow C = \ln m_o.$$

$$\therefore \ln m = -\lambda t + \ln m_o \quad \text{eli} \quad \ln m - \ln m_o = -\lambda t.$$

$$\therefore \ln \frac{m}{m_O} = -\lambda t \quad \therefore \frac{m}{m_o} = e^{-\lambda t} \quad \therefore \; \boldsymbol{m = m_o e^{-\lambda t}}.$$

Edellä mainitun kahden verrannollisuuskohdan 1) ja 2) sijaan olisi voitu lähteä liikkeelle suoraan diff.yhtälöstä (1). Sen mukaan ainemäärän *muuttumisnopeus* on verrannollinen jäljellä olevaan ainemäärään.

## 1.4 Lineaarinen 1. kertaluvun DY

Lineaarisen, 1. kertaluvun DY:n yleinen muoto on

(1) $$\boxed{y' + u(x)y = v(x)}.$$

Lineaarisuus merkitsee tässä yhteydessä, että diff.yhtälö on 1. astetta muuttujiin $y$ ja $y'$ nähden. Esim. diff.yhtälöt

$$y' + x^2\ y = x + 1, \quad xy' - (x+1)y = \sin 2x, \quad y' = y / x$$

ovat lineaarisia, mutta seuraavat DY:t eivät ole:

$$xy' + y^2 = 0, \quad yy' + 2y = x, \quad y' = x / y\ .$$

Vastaavassa **homogeenisessa DY:ssä** on $v(x)$:n tilalla 0:

(2) $$\boxed{y' + u(x)y = 0}.$$

Lineaarisen DY:n (1) ratkaiseminen tapahtuu kolmessa vaiheessa:

*Vaihe 1:* *Vastaavan homogeenisen DY:n (2) yleisen ratkaisun* $y = y_h(x)$ *määrittäminen* (ratkaisukaavalla),

*Vaihe 2:* *Lineaarisen DY:n (1) jonkin yksityisratkaisun* $y = y_o(x)$ *etsiminen* (yritteellä tms.).

*Vaihe 3:* *Lineaarisen DY:n (1) yleinen ratkaisu on näiden kahden ratkaisun summa:*

$$y = y_h(x) + y_o(x).$$

***Vaihe 1*** *Johdetaan* ***homogeenisen*** *DY:n (2) yleiselle ratkaisulle* ***ratkaisukaava***. Se käy erottamalla muuttujat:

$$\frac{dy}{dx} = -u(x) \cdot y$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int u(x)\, dx \quad \Big| \text{ merkitään } u(x)\text{:n integraalifunktiota } U(x)\text{:llä}$$

$$\ln|y| = -U(x) + C_1$$

$$y = \pm e^{-U(x)+C_1} = \pm e^{C_1} \cdot e^{-U(x)} = C\, e^{-U(x)}.$$

Saatu tulos esitetään yleensä muodossa, jossa integraalifunktion $U(x)$ tilalle merkitään $\int u(x)\,dx$. Kun tämän integraalin arvo lasketaan, siihen ei tule enää mukaan integroimisvakiota, sillä integroimisvakio siirtyi johtamisessa lausekkeen eteen. Siis

**Lause.** *Homogeenisen DY:n* $\boxed{\boldsymbol{y' + u(x)y = 0}}$ *yleinen ratkaisu on*

(3) $$\boxed{\boldsymbol{y = Ce^{-\int u(x)\,dx}}},$$

*missä* $\int u(x)\,dx$ *on u(x):n integraalifunktio ilman yleistä integroimisvakiota.*

**Esim. 8** $y' + (\sin x)y = 0$

$$y = C\,e^{-\int \sin x\,dx} = C\,e^{\cos x} \leftarrow \text{ei int. vakiota tähän!}$$

Myös esimerkkien 4, 5 ja 7 DY:t ovat muotoa (2), joten ne voidaan ratkaista ratkaisukaavalla (3) seuraavasti:

1) $y' = 2xy$ (Esim. 4)

$y' - 2xy = 0 \quad (\therefore\ u(x) = -2x)$

$$y = C\,e^{-\int -2x\,dx} = C\,e^{\int 2x\,dx}$$

$$y = C\,e^{x^2} \leftarrow \text{ei int. vakiota!}$$

2) $xy' - 2y = 0$ (Esim. 5.)

$$y' - \frac{2}{x}y = 0$$

$$y = C\,e^{-\int -\frac{2}{x}\,dx} = C\,e^{2\ln|x|} = C\,e^{\ln x^2} = C\,x^2.$$

3) $\dfrac{dm}{m} = -\lambda \cdot m \Leftrightarrow m' + \lambda\, m = 0$ (Esim. 7.)

$$m = C\,e^{-\int \lambda\,dt} = C\,e^{-\lambda t}.$$

Sen sijaan esimerkin 6 DY $y' + 2xy^2 = 0$ <u>ei ole</u> muotoa (2) (sillä vp. ei ole <u>lineaarinen</u>), joten siihen ratkaisukaava ei käy.

***Vaihe 2*** *Lineaarisen DY:n* $y' + u(x)\,y = v(x)$ *jonkin yksityisratkaisun etsiminen.*

Seuraavassa rajoitutaan siihen tapaukseen, että $u(x)$:nä on jokin vakio $a$, ts. että kyseessä on ns. ***vakiokertoiminen*** *lineaarinen DY*.

(4) $$\boxed{\boldsymbol{y' + a \cdot y = v(x)}}.$$

Kun etsitään tämän jotakin yksityisratkaisua, etsitään sellaista $x$:n lauseketta $y(x)$, että jos se kerrotaan $a$:lla ja lisätään derivaattaansa $y'(x)$, tuloksena on lauseke $v(x)$:

$$y'(x) + a \cdot y(x) = v(x).$$

*Kun y(x):n kerroin on vakio a,* ***lausekkeen y(x) muoto voidaan päätellä v(x):n muodon perusteella*** seuraavasti:

> Jos esim. $v(x)$ on 2. asteen polynomi, niin $y(x)$:nkin täytyy olla polynomi, jotta lausekkeesta $y'(x) + a \cdot y(x)$ tulisi polynomi. Koska $y'(x)$ on alempiasteinen kun $y(x)$, ei lausekkeesta $y'(x) + a \cdot y(x)$ tule 2. asteen polynomia, ellei $y(x)$:n aste ole tarkalleen 2.
>
> Vastaavasti jos $v(x)$ on esim. $2\,e^{3x}$, täytyy $y(x)$:n olla sama $e$:n potenssi $e^{3x}$ sopivalla vakiolla $A$ kerrottuna, jotta lausekkeesta $y'(x) + a \cdot y(x)$ voisi tulla $2\,e^{3x}$.

Etsittävää funktiota $y = y(x)$ sanotaan ***yritteeksi***. Seuraavaan taulukkoon on koottu eräitä esimerkkejä sopivista yritefunktioista.

| **DY**: $\boldsymbol{y' + a \cdot y = v(x)}$ <br> $\boldsymbol{v(x)}$ | **Yrite:** <br> $\boldsymbol{y = y(x)}$ |
|---|---|
| $2x + 3$ | $y = Ax + B$ |
| $x^2 + 3$ | $y = Ax^2 + Bx + C$ (ei riitä $y = Ax^2 + C$) |
| $5\sin 3x + 2\cos 3x$ | $y = A\sin 3x + B\cos 3x$ |
| $2\sin 3x$ | $y = A\sin 3x + B\cos 3x$ (ei $y = A\sin 3x$) |
| $5e^{2x}$ | $y = Ae^{2x}$ tai joskus $y = Axe^{2x}$ |
| $3x + 2e^{-5x}$ | $y = Ax + B + Ce^{-5x}$ (joskus $x$:llä kerrottu) |

***Vaihe 3*** Vaiheiden 1 ja 2 tulosten yhdistäminen. Voidaan todistaa, että *lineaarisen DY:n yleinen ratkaisu on homogeenisen yhtälön yleisen ratkaisun ja koko lineaarisen DY:n ratkaisujen summa*.

**Esim. 9** $y' + 3y = 18x.$

**1°**. Homog. diff. yhtälön $y' + 3y = 0$ yleinen ratkaisu:

$$\boldsymbol{y = \mathrm{Ce}^{-\int 3\,dx} = Ce^{-3x}}.$$

**2°**. Koko DY:n yksityisratkaisu. Yrite:

$$+\begin{cases} y = Ax + B & \cdot 3 \\ \underline{y' = \quad A} & \cdot 1 \end{cases}$$

$y' + 3y = 3Ax + (3B + A) \equiv 18x.$

Jotta DY:n vp ja op olisivat identtisesti eli kaikilla $x$:n arvoilla samat, täytyy vastinpotenssien kertoimien olla samat. Täten saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 3A = 18 \\ 3B + A = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} A = 6 \\ B = -2 \end{cases} \therefore \text{ yksityisratkaisu on } \boldsymbol{y = 6x - 2}.$$

**1° + 2°**: Koko DY:n yleinen ratkaisu on summa

$$\boldsymbol{y = Ce^{-3x} + 6x - 2}.$$

**Esim. 10** $y' - 2y = 4\cos 2x$

**1°**. $y = Ce^{\int 2\,dx} = \mathbf{Ce^{2x}}.$

**2°**. *Yrite*:

$$\begin{cases} y = \quad A\sin 2x + \quad B\cos 2x & \cdot(-2) \\ \underline{y' = -2B\sin 2x + 2A\cos 2x} & \cdot 1 \end{cases}$$

$$(-2A - 2B)\sin 2x + (2A - 2B)\cos 2x \equiv 4\cos 2x$$

$$+\begin{cases} -2A - 2B = 0 \\ \underline{\quad 2A - 2B = 4} \end{cases}$$

$$-4B = 4 \;\; \therefore B = -1, A = 1 \;\; \therefore y = \mathbf{sin2x - cos2x}.$$

**1° + 2°**: $\mathbf{y = Ce^{2x} + sin2x - cos2x}.$

Seuraavan esimerkin a)-kohdassa on käytettävä "tavallista" eksponentti-funktio-yritettä ja b)-kohdassa $x$:llä kerrottua yritettä.

**Esim. 11** $a)\ y' - 2y = 9e^{5x}$.

$\mathbf{1^o}$. $\mathbf{y = Ce^{2x}}$ ( edellä)

$\mathbf{2^o}$. $+\left\{\begin{array}{l} y = Ae^{5x} \\ y' = 5Ae^{5x} \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \cdot 1 \end{array}$

$$3Ae^{5x} \equiv 9e^{5x} \ \therefore 3A = 9 \ \therefore A = 3 \ \therefore \mathbf{y = 3e^{5x}}$$

$\mathbf{1^o + 2^o}$: $\mathbf{y = Ce^{2x} + 3e^{5x}}$.

$b)\ y' - 2y = 4e^{2x}$ $\mathbf{1^o}$. $\mathbf{y = Ce^{2x}}$.

$\mathbf{2^o}$. Yrite $y = Ae^{2x}$ ei käy, sillä tätä muotoa olevat funktiot toteuttavat *homogeenisen* DY:n $y' - 2y = 0$ (kohdan 1° nojalla, jossa on juuri sama eksponentti $2x$ ja $A$:n paikalla vain $C$).

Toisin sanottuna: jokainen funktioista $y = Ae^{2x}$ tekee DY:n vp:n 0:ksi, eikä mikään tee sitä $4e^{2x}$:ksi. Se, että yrite $y = Ae^{2x}$ ei käy, näkyisi laskuissa siten, että jouduttaisiin mahdottomaan yhtälöön $0 \equiv 4e^{2x}$ (kokeile).

Tällaisessa tapauksessa täytyy kokeilla *x:llä kerrottua yritettä*:

$$+\left\{\begin{array}{l} y = Axe^{2x} \\ y' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x} \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \cdot 1 \end{array}$$

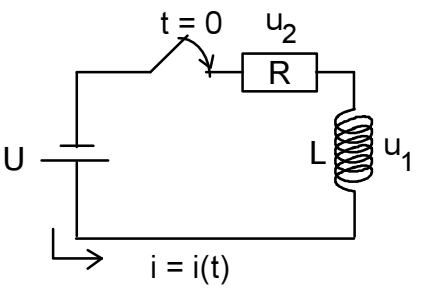
$$-2Axe^{2x} + Ae^{2x} + 2Axe^{2x} = Ae^{2x} \equiv 4e^{2x} \ \therefore A = 4.$$

$$\therefore \mathbf{y = 4xe^{2x}}.$$

$\mathbf{1^o + 2^o}$: $\mathbf{y} = Ce^{2x} + 4xe^{2x} = \mathbf{e^{2x}(C + 4x)}$.

## 1.5 Virtapiirisovellus

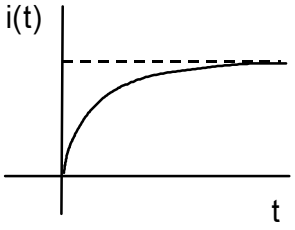
**Esim. 12** (*RL*-piiri) Johdetaan virranvoimakkuudelle $\boldsymbol{i = i(t)}$ lauseke oheisessa virtapiirissä. Katkaisija suljetaan hetkellä $t = 0$, jolloin virta alkaa kasvaa arvosta 0. Virta ei saavuta heti lopullista arvoaan $i_\infty$, sillä käämi vastustaa virran kasvua.



Käämin vastustava vaikutus virran muuttumiseen voidaan esittää seuraavana sääntönä: *käämissä tapahtuva jännitehäviö on verrannollinen virran muuttumisnopeuteen*, ts.

$$\boldsymbol{u_1 = L \cdot \frac{di}{dt}} \quad \text{(verrannollisuuskerroin } L \text{ on } \textbf{\textit{induktanssi}}\text{)}.$$

(Alussa, jolloin virta pyrkii kasvamaan nopeasti, käämi vastustaa tehokkaasti virran kasvua. Myöhemmin, kun virta ei enää paljon kasva, ts. em. derivaatta ≈ 0, käämin vaikutus on lähes olematon.)




Vastuksen aiheuttama jännitehäviö taas on (*Ohmin* lain mukaan) *verrannollinen virran voimakkuuteen*:

$$\boldsymbol{u_2 = R \cdot i} \quad \text{(verrannollisuuskerroin R on } \textbf{\textit{resistanssi}}\text{)}.$$

Koska kokonaisjännite $U$ on jännitehäviöiden summa (Kirchhoff), saadaan DY

$$\boldsymbol{L \cdot i' + R \cdot i = U}\ .$$

Tämä on vakiokertoiminen, lineaarinen 1. kertaluvun DY (jossa oikealla puolella on vakiopolynomi). Ratkaistaan se:

**1°.** Homog. DY on $L \cdot i' + R \cdot i = 0$ eli

$$i' + \frac{R}{L} i = 0 \ \therefore i = Ce^{-\int \frac{R}{L} dt} = Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

**2°**. Koska op. on vakiopolynomi $U$, niin yrite on

$$+ \underline{\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{i} = \mathrm{A} \\ \mathrm{i}' = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot R \\ \cdot L \end{array}}$$

$$AR \equiv U \therefore A = \frac{U}{R} \ \therefore i = \frac{U}{R}.$$

**1° + 2°**: $\quad i = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R}$

$$\textit{Alkuehto}: \begin{cases} t = 0 \\ i = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = Ce^0 + \frac{U}{R} \therefore C = -\frac{U}{R}$$

$$\therefore i = -\frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R} \to \frac{U}{R}, \textit{ kun } t \to \infty \ \therefore \boldsymbol{i_\infty = \frac{U}{R}}.$$

## HARJOITUKSIA

### A

**1.1** Ratkaise DY $xy' = 1$, alkuehtona $y(1) = 2$ eli $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$.

**1.2** Määritä DY:n $y' = \sin 2x$ yleinen ratkaisu sekä sellainen yksityisratkaisu, että se täyttää alkuehdon $y(0) = 1$.

**1.3** a) $x + y' = x^2$, $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$, b) $x^2 y'' = 1$, $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ y' = 1 \end{cases}$.

**1.4** Ratkaise erottamalla muuttujat a) $y' - xy = 0$, b) $y' + (\sin x)y = 0$.

**1.5** Ratkaise DY a) xdy+ydx=0, $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$, b) $x^2 dy + y^2 dx = 0$, $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$.

**1.6** Ratkaise ratkaisukaavalla: a) $y' - xy = 0$, b) $y' + (\sin x)y = 0$.

**1.7** Ratkaise a) erottamalla muuttujat, b) ratkaisukaavalla $2y' - 3xy = 0$.

**1.8** Ratkaise a) $y' + 2y = x$, b) $y' + 2y = 3e^{4x}$.

**1.9** Mikä DY:n $y' + 2y = \sin 2x$ ratkaisukäyristä kulkee origon kautta?

### B

**1.10** Ratkaise DY $y''x^2 = 1$, alkuehtoina $y(1) = y(2) = 1$.

**1.11** Määritä DY:n $y'' = xe^{2x}$ yleinen ratkaisu.

**1.12** Pystysuorassa heittoliikkeessä kiihtyvyys $a$ toteuttaa ehdon $a = -g$ ($g = 9{,}81\, m/s^2$, $a = s''(t)$). Määritä matkan $s = s(t)$ lauseke, kun hetkellä $t = 0$ kappaleella on alkunopeus $v_o$ ja alkukorkeus $s_o$.

**1.13** Ratkaise seuraava DY erottamalla muuttujat sekä piirrä ratkaisukäyrä $yy' - x = 1$, $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

**1.14** a) $y' + 4xy = 0$, b) $xy' + y^2 = 0$ (vihje: eri menetelmät a)- ja b) kohdissa).

**1.15** Ratkaise DY $y' - 3y = 6$ a) erottamalla muuttujat , b) käsittelemällä DY:tä lineaarisena DY:nä.

**1.16** Kappaleen lämpötila hetkellä $t$ on $T$ ja ympäristön on (koko ajan) $T_{ymp}$. Lyhyenä aikavälinä lämpötilan muutos on verrannollinen aikavälin pituuteen sekä kappaleen ja ympäristön väliseen lämpötila-eroon. a) Johda näiden tietojen avulla lämpötilalle $T = T(t)$ DY ja b) ratkaise se, kun kappaleen alkulämpötila (hetkellä $t = 0$) on $10\ ^oC$ ja ympäristön $50\ ^oC$ (erota muuttujat).

**1.17** Edellisen harjoituksen mukaisen kappaleen lämpötila on tunnin kuluttua (hetkellä $t = 1$) $45^o$. Mikä se on kahden tunnin kuluttua?

**1.18** Ratkaise a) $y' - y = e^{-x}$, b) $y' + y = e^{-x}$.

**1.19** Vaihtovirtapiirissä jännite $u = 3\sin 2t$, $R = 2\,(\Omega)$ ja $L = 1\,(H)$ (arvot ovat laskujen yksinkertaistamiseksi tekaistuja). Johda virranvoimakkuudelle $i = i(t)$ DY ja ratkaise se, kun $i(0) = 1/4\,(A)$.

## C

**1.20** Kummastakin päästään tuetun palkin pituus on $L$ ja sitä kuormittaa tasainen kuorma, kuormituskorkeutena $q$ (= vakio). Laske diff.yhtälöillä taivutusmomentin ja taipumaviivan lausekkeet.

**1.21** Laske ulokekannattajan, jonka pituus on $L$ ja jota kuormittaa tasainen kuorma, taipumaviivan yhtälö ja maksimitaipuma. (Ohje: alkuehdot ovat $y(0) = 0$ ja $\mathbf{y'(0) = 0}$ —miksi?)

**1.22** Vaihtovirtapiirissä on $u = 311\sin(100\pi t)$, $R = 2\Omega$, $L = 1H$ ja $i(0) = 0$ (käämin oikosulkumoottori) . Määritä $i(t)$:n lauseke.

**1.23** Eräs bakteerikanta lisääntyy siten, että lyhyenä aikavälinä lisäys on verrannollinen bakteerimäärään ja aikavälin pituuteen. Tutkimus alkoi klo 9.00 ja klo 12.00 todettiin bakteerimäärän lisääntyneen 72%.

a) Montako % määrä on lisääntynyt kokeen alusta hetkeen 11.00 mennessä?

b) Milloin bakteerimäärä tulee kolminkertaiseksi alkutilanteeseen verrattuna?

c) Montako % määrä lisääntyy aikavälillä klo 16.00 ... klo 16.30?

**1.24** **Vakion variointi.** Jos 1. kertaluvun lineaarinen DY ei ole vakiokertoiminen, sen yksityisratkaisua ei löydetä yleensä edellä esitetyllä yritemenetelmällä, vaan sopiva yrite saadaan muuntamalla (varioimalla) homogeenisen diff.yhtälön yleistä ratkaisua seuraavasti. Korvaa homogeenisen diff.-yhtälön ratkaisussa vakio $C$ funktiolla $C(x)$ ja yritä löytää tälle funktiolle jokin sellainen lauseke, että näin muunnettu homogeenisen DY:n ratkaisu toteuttaa lineaarisen DY:n. Esimerkiksi

$y' + \frac{1}{x} y = \sin x, x > 0$ **1°**. Homog.DY:n yl. ratk. on $y = \frac{C}{x}$ (laske!)

**2°**.

$$\begin{cases} y = \frac{C(x)}{x} & \mid \cdot \frac{1}{x} \\ y' = \frac{C'(x) \cdot x - C(x)}{x^2} & \mid \cdot 1 \end{cases}$$

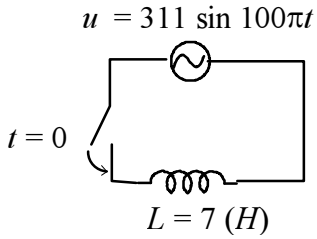
$$\frac{C'(x)}{x} \equiv \sin x \ \therefore C'(x) \equiv x \sin x \ \therefore C(x) = \sin x - x \cos x$$

**1°** + **2°**: $y = \frac{C}{x} + \frac{\sin x}{x} - \cos x$ .

a) Suorita edelliset laskut yksityiskohtaisesti.

b) Ratkaise DY $y' + 2y \tan x = \sin^2 x$ .

**1.25** Laske virta $i(t)$ viereisessä piirissä:




**1.26** Osoita, että funktiot

$(x - C_1)^2 + (y - C_1)^2 + z^2 = a^2$

toteuttavat *osittaisdifferentiaaliyhtälön*

$z \cdot (\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}) = y - x$ .

(Vihje: termin $z^2$ osittaisderivaatta esim. $x$:n suhteen on $2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$).

# 2 Toisen kertaluvun DY

## 2.1 Vakiokertoiminen lineaarinen toisen kertaluvun DY

Otsikon mukainen DY on muotoa

(1) $$\boxed{y'' + ay' + by = v(x)}.$$

Se ratkaistaan kolmessa vaiheessa, joista kaksi viimeistä ovat lähes samanlaisia kuin edellä (mutta joskus tarvitaan $x^2$:lla kerrottu yrite). Ensimmäinen vaihe, vastaavan *homogeenisen* DY:n

(2) $$y'' + ay' + by = 0$$

yleisen ratkaisun määrittäminen, on erilainen. Ratkaiseminen perustuu ns. ***karakteristisen yhtälön*** käyttämiseen ja seuraavaan lauseeseen (joka esitetään todistuksetta):

**Lause 1** *Jos homogeeniselle DY:lle (2) löydetään kaksi yksityisratkaisua* $y_1(x)$ *ja* $y_2(x)$*, joiden suhde ei ole vakio, niin* ***homogeenisen DY:n yleinen ratkaisu*** *on*

$$y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$$

Näiden kahden yksityisratkaisun $y_1(x)$ *ja* $y_2(x)$ määrittämistavan johtamiseen käytetään eksponenttimuotoista yritettä $y = e^{rx}$ (joka on samantapainen kuin vastaavan 1. kertaluvun DY:n $y' + ay = 0$ ratkaisu $y = Ce^{-ax}$).

$$\left\{\begin{array}{l} y = e^{rx} \\ y' = re^{rx} \\ y'' = r^2 e^{rx} \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot b \\ \cdot a \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$y'' + ay' + by = \underbrace{e^{rx}}_{>0}(r^2 + ar + b) \equiv 0 \;\; \therefore r^2 + ar + b = 0.$$

Funktio $y = e^{rx}$ on siis homogeenisen diff.yhtälön (2) yksityisratkaisu, mikäli *r*:llä on sellainen arvo, että

$$\boxed{r^2 + ar + b = 0}.$$

Tätä tavallista toisen asteen yhtälöä sanotaan DY:n (2) ***karakteristiseksi yhtälöksi***. Huomaa, että *sen kertoimet ovat samat kuin DY:n kertoimet*.

Sen mukaan, millaisia karakteristisen yhtälön $\boldsymbol{r^2 + ar + b = 0}$ juuret (eli ratkaisut) ovat, käsittely jakautuu kolmeen osaan:

1) Karakteristisella yhtälöllä on ***kaksi erisuurta reaalijuurta*** $r_1$ *ja* $r_2$. Tällöin em. yritteellä saadaan yksityisratkaisut $y = e^{r_1 x}$ *ja* $y = e^{r_2 x}$. Näiden suhde $e^{r_1 x} : e^{r_2 x} = e^{(r_1 - r_2)x} \neq vakio$, joten Lauseen 1 mukaan *homogeenisen DY:n (2) yleinen ratkaisu* on

$$\underline{\underline{\boldsymbol{y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}}}}.$$

2) Karakteristisen yhtälön juuret ovat samat eli yhtälöllä on ***kaksoisjuuri*** $\boldsymbol{r_{1,2}}$. Tällöin em. yritteellä saadaan vain yksi yksityisratkaisu $y = e^{r_{1,2} x}$. Voidaan todistaa, että tällöin myös $x$:llä kerrottu funktio $y = xe^{r_{1,2} x}$ toteuttaa homogeenisen DY:n. Lauseen 1 mukaan *homogeenisen DY:n (2) yleinen ratkaisu* on nyt

$$\underline{\underline{\boldsymbol{y}}} = C_1 e^{r_{1,2} x} + C_2 x e^{r_{1,2} x} = \underline{\underline{\boldsymbol{e^{r_{1,2} x}(C_1 + C_2 x)}}}.$$

3) Karakteristisen yhtälön juuret ovat ***imaginaariset***: $\boldsymbol{r = a \pm bi}$, $a, b \in \mathbf{R}$. Voidaan todistaa, että tässä tapauksessa $y = e^{ax} \sin bx$ ja $y = e^{ax} \cos bx$ toteuttavat homogeenisen DY:n. Koska näiden kahden yksityisratkaisun suhde ei ole vakio (vaan = $\tan bx$), niin *homogeenisen DY:n (2) yleinen ratkaisu* on

$$\underline{\underline{\boldsymbol{y = e^{ax}(C_1 \sin bx + C_2 \cos bx)}}}.$$

## 2.2 Esimerkkejä

**Esim. 1** Ratkaistaan kaksi vakiokertoimista, homogeenista diff.yhtälöä:

**1)** $\boldsymbol{y'' + 4y' + 4y = 0}$ $\Big|$ **karakteristinen yhtälö** $\mathbf{r^2 + 4r + 4 = 0}$

***kaksoisjuuri*** $\boldsymbol{r = -2}$

$$\therefore \boldsymbol{y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x)}.$$

2) $y'' + 4y' + 13y = 0 \;\Big|\; r^2 + 4r + 13 = 0$

$$r = -2 \pm \sqrt{2^2 - 13} = -2 \pm \sqrt{-9} = -2 \pm 3i$$

$$\therefore \boldsymbol{y = e^{-2x}(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)}.$$

Seuraava DY ei ole enää homogeeninen vaan lineaarinen, joten siinä on käytettävä kaikkia em. vaiheita 1°, 2° ja 3°. Huomaa, että mukana olevat alkuehdot ovat *koko DY:n* alkuehtoja, joten niitä on käytettävä kohtaan $1^\circ + 2^\circ$ eikä kohdan 1° jälkeen.

**Esim. 2** $y'' + 4y' + 3y = 18x$, alkuehtoina $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ ja $\begin{cases} x = 0 \\ y' = 3 \end{cases}$.

**1°.** Homog. DY:n yleinen ratkaisu. Karakt. yhtälö on

$r^2 + 4r + 3 = 0 \;\Big|$ juuret $r_1 = -1,\ r_2 = -3$

$\therefore y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$.

**2°.** Koko DY:n yksityisratkaisu. Yrite:

$$\begin{cases} y = Ax + B \\ y' = A \\ y'' = 0 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot 4 \\ \cdot 1 \end{matrix}$$

$$3Ax + (4A + 3B) \equiv 18x$$

$$\begin{cases} 3A = 18 \\ 4A + 3B = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} A = 6 \\ B = -8 \end{cases} \therefore y = 6x - 8$$

**1° + 2°.** $\boldsymbol{y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + 6x - 8}$

**Alkuehdot:** $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 = C_1 e^0 + C_2 e^0 - 8 \Rightarrow C_1 + C_2 = 9$

$$y' = -C_1 e^{-x} - 3C_2 e^{-3x} + 6$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y' = 3 \end{cases} \Rightarrow 3 = -C_1 - 3C_2 + 6 \Rightarrow C_1 + 3C_2 = 3$$

$$+ \begin{cases} C_1 + C_2 = 9 \\ C_1 + 3C_2 = 3 \end{cases} \begin{matrix} \cdot (-1) \\ \cdot 1 \end{matrix}$$

$$2C_2 = -6$$

$\therefore C_2 = -3,\ C_1 = 12$ $\qquad \boldsymbol{\therefore y = 12e^{-x} - 3e^{-3x} + 6x - 8.}$

*Seuraavasta DY:stä puuttuu $y$-termi, mikä aiheuttaa tässä esimerkissä (mutta ei aina) sen, että täytyy käyttää $x$:llä kerrottua yritettä (yksityiskohdat harj.)

***Esim. 3** $y'' + y' = 2x + 1$

**1°.** $r^2 + r = 0 \Leftrightarrow r(r+1) = 0 \ \therefore r_1 = 0, r_2 = -1.$

$\therefore y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-x} = C_1 + C_2 e^{-x}.$

**2°.** Yrite $y = Ax + B$ johtaa ristiriitaan $\underbrace{A}_{\text{vakio}} \equiv \underbrace{2x+1}_{\text{ei ole vakio}}$.

Yrite $y = x(Ax + B)$ eli $y = Ax^2 + Bx$ sensijaan käy.

Suorita laskut. Vastaus on $\boldsymbol{y = C_1 + C_2 e^{-x} + x^2 - x}$.

*Seuraavassakin esimerkissä yritteet ovat poikkeuksellisia (harj.).

***Esim. 4** $a)$ $y'' + 9y = 2\sin 3x \,\big|\, \mathbf{1^o.}$ $r^2 + 9 = 0 \therefore r = \pm 3i$

$\therefore y = e^{0x}(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x) = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x.$

**2°.** Yrite $y = A\sin 3x + B\cos 3x$ ei käy, sillä nämä funktiot ovat juuri samat kuin homogeenisen DY:n ratkaisut. Siksi tarvitaan $x$:llä kerrottu yrite. (Käytä derivaattoja laskiessasi tulon derivoimissääntöä.)

$b)$ $y'' + 4y' + 4y = 6e^{-2x}$. Homog. DY:n ratkaisu on Esim.1 mukaan

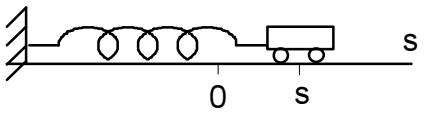
$y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}.$

Yritefunktioksi ei käy $y = Ae^{-2x}$ eikä myöskään $y = Axe^{-2x}$, sillä nämä funktiot ovat mukana homog. DY:n ratkaisuissa (kun valitaan $C_2 = 0$ tai vastaavasti $C_1 = 0$). Siksi tässä esimerkissä on käytettävä $x^2$:lla kerrottua yritettä $y = Ax^2 e^{-2x}$.

*Jos edellisen DY:n oikealla puolella olisi ollut esim. $6e^{-3x}$ (siis eri eksponentti kuin homogeenisen DY:n ratkaisussa), niin normaali yrite $y = Ae^{-3x}$ olisi ollut oikea yrite.

## 2.3 Sovelluksia

**Esim. 5** ***Vaimenematon harmoninen liike***. *Kappale, jonka massa* $m = 4$, *liikkuu pitkin s-akselia edestakaisin voiman* $F = -16s$ *vaikutuksesta. Muodosta liikkeelle* $s = s(t)$ *DY ja ratkaise se, kun hetkellä* $t = 0$ *kappale on kohdassa* $s = 1$ *ja sillä on nopeus* $v = -2\sqrt{3}$.




Nopeudella on näin erikoinen arvo, jotta amplitudiksi saataisiin kokonaisluku. Luonnollisempi arvo olisi esim. tämän nopeuden likiarvo. Mittayksiköt on jätetty pois, jotta perusidea tulisi paremmin esiin.

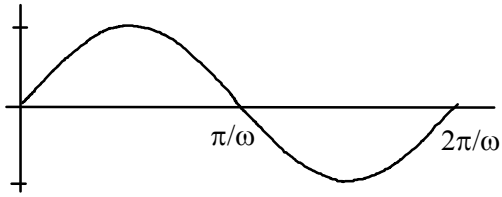
Lähtökohtana on liikelaki $\boldsymbol{F = ma}$, missä ***F on kaikkien vaikuttavien voimien summa***. Tässä esimerkissä mukana on vain "harmoninen" voima $F = -16s$. Diff.yhtälöön joudutaan sen kautta, että kiihtyvyys on matkan toinen derivaatta: $\boldsymbol{a = s''(t)}$.

$$\boldsymbol{ma} = \boldsymbol{F} \quad \big| m = 4,\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{s''},\ \boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{F_i} = -16s$$
$$4s'' = -16s \quad \big| :4$$
$$\therefore \boldsymbol{s'' + 4s = 0}.$$

Kyseessä on homogeeninen vakiokertoiminen 2. kertaluvun DY. Se ratkeaa siis karakteristisen yhtälön avulla seuraavasti:

$$r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 2i \quad \therefore s = \underbrace{e^{0t}}_{=1}(C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t)$$
$$= C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t$$
$$v = s' = 2C_1 \cos 2t - 2C_2 \sin 2t$$
$$\begin{cases} t = 0 \\ s = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 = C_1 \underbrace{\sin 0}_{=0} + C_2 \underbrace{\cos 0}_{=1} \Rightarrow C_2 = 1$$
$$\begin{cases} t = 0 \\ v = -2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow -2\sqrt{3} = 2C_1 - 0 \Rightarrow C_1 = -\sqrt{3}$$
$$\therefore \boldsymbol{s = -\sqrt{3} \sin 2t + \cos 2t}.$$

Harmoninen liike muodostuu siis sini- ja kosinikomponenteista, joilla kummallakin on *sama jakso* $2\pi / 2 = \pi$.




Yleisesti funktion $y = \sin \omega t$ jakso on $T = 2\pi / \omega$, sillä

$$\sin \omega t = 0 \Leftrightarrow \omega t = n \cdot \pi \Leftrightarrow t = n \cdot \pi / \omega,$$

josta saadaan peräkkäisiä 0-kohtia $0, \pi / \omega, 2\pi / \omega, \ldots$ .

*Koska komponenttiaalloilla on sama jakso, ne voidaan tarvittaessa (esim. piirtämistä varten) yhdistää yhdeksi siniaalloksi seuraavasti:

$$s = -\sqrt{3}\sin 2t + \cos 2t \equiv \boldsymbol{A\sin(2t+\varphi)} \quad \big| \; A, \varphi = ?$$
$$\equiv A(\sin 2t\cos\varphi + \cos 2t\sin\varphi)$$
$$\equiv (A\cos\varphi)\sin 2t + (A\sin\varphi)\cos 2t$$

$$+ \underline{\begin{cases} A\cos\varphi = -\sqrt{3} \\ A\sin\varphi = 1 \end{cases} \Bigg| \begin{matrix} (\,)^2 \\ (\,)^2 \end{matrix}}$$

$A^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 3 + 1 \;\; \therefore A = 2$

Jaetaan alempi yhtälö ylemmällä $\Rightarrow$

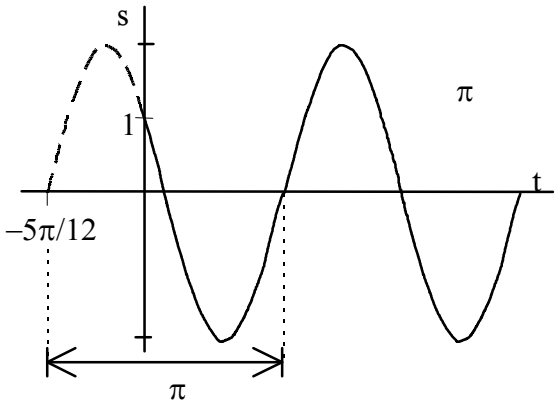
$\dfrac{A\sin\varphi}{A\cos\varphi} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \;\; \therefore \tan\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ , 2. neljännes, koska $\begin{cases} \text{sini pos.} \\ \text{kosini neg.} \end{cases}$

Peruskulma $\varphi_o = \pi/6 \therefore \varphi = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$

$\therefore \underline{\underline{\boldsymbol{s = 2\sin(2t + 5\pi/6)}}}$.

Käyrä on viereisen kuvan mukainen. Kohta $-5\pi/12$ saadaan, kun tutkitaan milloin $s = 0$ eli milloin $\sin(2t + 5\pi/6) = 0$. Tämän yksi ratkaisu on

$$2t + 5\pi/6 = 0$$
$$\therefore t = -5\pi/12.$$




Yhtälössä $t$:n kerroin 2 on värähtelyn *kulmataajuus*, jota merkitään yleensä $\omega$:lla. Siis tässä esimerkissä

*kulmataajuus* $\omega = 2$, *jakso* (jaksonaika) $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \pi$,

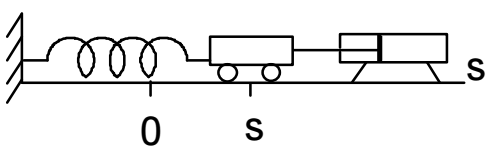
*frekvenssi eli taajuus* $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{\pi}$.

Seuraavassa esimerkissä heikennetään harmonista voimaa $F = -16s$, korvaamalla se voimalla $F = -13s$. Samalla lisätään systeemiin *vaimennus*, jonka suuruus on valittu sellaiseksi, että lopputuloksena on värähtely (nyt vaimennettuna), jonka kulmataajuus ω on edelleenkin 2.

**Esim. 6** ***Vaimennettu harmoninen liike***. Kappaleeseen, jonka massa on 1, vaikuttaa harmoninen voima $F_1 = -13s$ ja vaimentava voima, joka on verrannollinen nopeuteen: $F_2 = -6v$ (ns. ***lineaarinen***

***vaimennus***). Johda liikkeelle DY ja ratkaise se, kun hetkellä $t = 0$ kappale on kohdassa $s = 1$ ja sillä on nopeus $v = -1$.

Tilannetta voidaan havainnollistaa oheisella kuvalla, jossa systeemiin on lisätty jokin vaimennin (esim. vajaatehoinen iskunvaimennin).




$$\boldsymbol{ma} = \boldsymbol{F} \;\Big|\; m = 1,\ a = s'',\ F = \sum F_i = -13s - 6v = -13s - 6s'$$

$$1 \cdot s'' = -13s - 6s' \quad \therefore\ \mathbf{s'' + 6s' + 13s = 0} \;\Big|\; \text{homog.lin. } DY$$

$$\textit{Kar. yhtälö:}\quad r^2 + 6r + 13 = 0 \therefore r = -3 \pm \sqrt{9 - 13} = -3 \pm 2i.$$

$$\therefore \boldsymbol{s = e^{-3t}(C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t)} \quad \begin{cases} t = 0 \\ s = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 = 1 \cdot (0 + C_2) \therefore \boldsymbol{C_2 = 1}.$$

$$v = s' = -3 \cdot e^{-3t}(C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t) + e^{-3t}(2C_1 \cos 2t - 2C_2 \sin 2t)$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ v = -1 \end{cases} \Rightarrow -1 = -3 \cdot C_2 + 2C_1 \Rightarrow -1 = -3 + 2C_1 \therefore \boldsymbol{C_1 = 1}.$$

$$\therefore \underline{\underline{\boldsymbol{s = e^{-3t}(\sin 2t + \cos 2t)}}}.$$

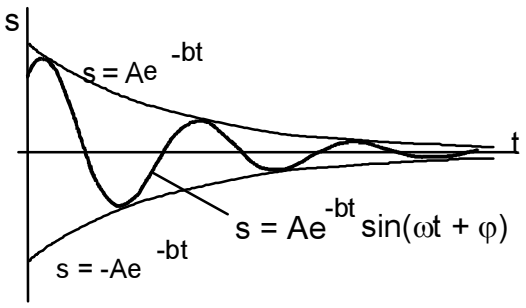
*Yhdistetään vielä sini-ja kosinikomponentit: $\sin 2t + \cos 2t$. Koska niillä on paitsi sama jakso ($2\pi / 2 = \pi$) myös sama amplitudi, yhdistäminen käy edellistä esimerkkiä helpommin trigonometrian tuloksen

$$\sin\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha \pm \pi/4)$$

avulla. Näin saadaan tulos

$$\underline{\underline{\boldsymbol{s = \sqrt{2}\, e^{-3t} \sin(2t + \pi/4)}}}.$$

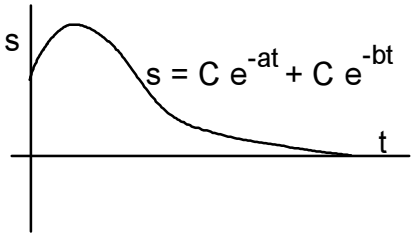
Kyseessä on vaimeneva, sinimuotoinen värähtely, jonka amplitudi on $\sqrt{2}e^{-3t}$. Vaimennustekijä $e^{-3t}$ pienenee hyvin voimakkaasti t:n kasvaessa. Käyrä on viereisen kuvan tapainen, mutta nopeammin vaimeneva ($b$:n arvo 3 on piirtämistä ajatellen liian suuri jos $s$- ja $t$-asteikoilla halutaan käyttää yhtä pitkää mittayksikköä).




Edellisessä esimerkissä harmonisen voiman $\boldsymbol{F = -ks}$ ja vaimentavan voiman $\boldsymbol{F = -\beta v = -\beta s'}$ kertoimien $k$ ja $\beta$ suhde oli sellainen, että tuloksena oli ns. ***heikko vaimennus***. Tämä näkyi laskuissa siten, että

karakteristisen yhtälön juuret olivat imaginaariset ja siksi värähtelystä tuli sinimuotoinen.

Jos suhdetta $\beta/k$ suurennetaan (joko kasvattamalla vaimennusta tai heikentämällä harmonista voimaa), karakteristisen yhtälön juuret muuttuvat reaaliksi ja ratkaisu on eksponenttimuotoa: $s = C_1 e^{-at} + C_2 e^{-bt}\ (a, b > 0)$. Kyseessä on ns. ***vahva vaimennus*** (vrt. auton jousitus ja kunnossa olevat iskunvaimentimet) ja käyrä on esimerkiksi seuraavan kuvan tapainen.

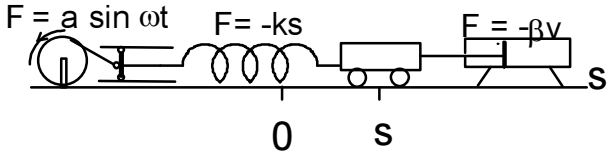



**Harj. A** $\begin{cases} m = 1, F_1 = -5s, F_2 = -6v, \\ s(0) = v(0) = 1 \end{cases}$.

Näiden välimuoto on ns. *kriittinen vaimennus,* joka vastaa kaksoisjuuri-tapausta. Ratkaisu on muotoa $s = e^{-at}(C_1 + C_2 t)$ ja käyrä ei eroa kovin paljoa edellisestä.

**Harj. B** $m = 1, F_1 = -9s, F_2 = -6v, s(0) = v(0) = 1$.

**Esim. 7** Lisätään edellisen esimerkin tapaiseen systeemiin vielä värähtelyä "häiritsevä" *pakkovoima* (joka voi olla esim. sinimuotoinen). Jos esimerkiksi $m = 1, F_1 = -5s, F_2 = -2v$ ja pakkovoima on $F_3 = 2\sin t$, niin DY:n ratkaisuksi saadaan (kohtien $1^o + 2^o$ avulla, tarkemmin harj.)



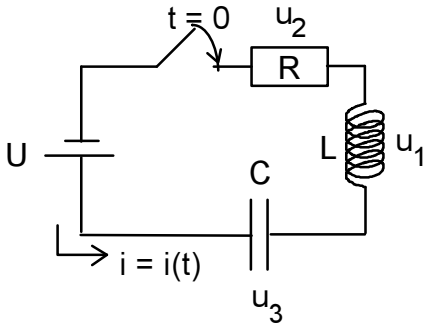

$$s = e^{-t}(C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t) + \tfrac{1}{5}(2\sin t - \cos t).$$

Ensimmäisen termin edessä oleva ***vaimennustekijä*** $e^{-t}$ aiheuttaa sen, että tämä termi $\to 0$, kun t kasvaa. Siten jonkin ajan kuluttua

$$s \approx \tfrac{1}{5}(2\sin t - \cos t) \approx \tfrac{\sqrt{5}}{5}\sin(t - 0{,}46).$$

ts. systeemi värähtelee pakkovoiman kulmataajuudella $\omega = 1$, mutta tässä esimerkissä pakkovoimaa pienemmällä amplitudilla. Pakkovoimaan $2\sin t$ nähden $s$:ssä on ***vaihe-ero* (*viive*)** 0,46.

**Esim. 8** ***RLC-piiri.*** Lisätään aikaisemmin käsiteltyyn RL-piiriin kondensaattori, jonka kapasitanssi on $C$ ja joka on hetkellä $t = 0$ varaukseton. Uusi jännitehäviö on verrannollinen varaukseen $q$ (verrannollisuuskertoimena $1/C$):




$$\boldsymbol{u_3 = \frac{1}{C} q}\,.$$

Kirchhoffin lain mukaan jännitehäviöiden summa on $= U$, ts.

(1) $$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = U\,.$$

Tässä yhtälössä on kaksi tuntematonta funktiota $\boldsymbol{i = i(t)}$ ja $\boldsymbol{q = q(t)}$. Niitä sitoo kuitenkin toisiinsa se, että lyhyenä aikavälinä $dt$ kondensaattori saa varauksen $dq = i(t)dt$ ts. että $\boldsymbol{i(t) = \frac{dq}{dt}}$. Siten $i'(t) = \frac{d^2q}{dt^2}$. Kun nämä sijoitetaan yhtälöön (1), saadaan

(2) $$\boldsymbol{L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = U}\,.$$

Tästä saadaan ratkaistua varaus $q$, alkuehtoina $q(0) = 0$ ja $i(0) = 0$ eli $q'(0) = 0$. Sen jälkeen $i$ saadaan $q$:n derivaattana.

*Yhtälöstä (1) saataisiin myös $i$:lle DY seuraavasti. Koska $dq = i(t)dt$, niin hetkeen $t$ mennessä kondensaattori on saanut varauksen

$q = \int_0^t i(t)\,dt$ (sillä koko varaus on osavarausten summa)

Kun tämä sijoitetaan yhtälöön (1), $i(t)$:lle saadaan *differentiaali-integraaliyhtälö*

$$\boldsymbol{L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt = U}\,.$$

Tästä yhtälöstä seuraa derivoimalla $i(t)$:lle 2. kertaluvun DY

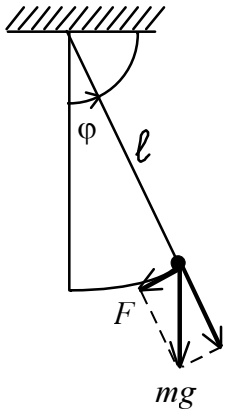
(3) $$\boldsymbol{L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = 0}\,,$$

sillä

$$\frac{d}{dt}\int_0^t f(t)dt = \frac{d}{dt}\Big|_0^t F(t) = \frac{d}{dt}\big[F(t) - F(0)\big] = F'(t) - 0 = f(t)\,.$$

*Yhtälön (3) toinen alkuehto on $i(0)=0$. Toinen $i'(0)=?$ täytyy laskea vastaavan *RL*-piirin $i(t):n$ lausekkeesta (ts. ajattelemalla, että alussa kondensaattori on tyhjä, joten se ei vaikuta silloin virran kasvusuuntaan).

***Esim. 9** ***Matemaattinen heiluri***, pituus $\ell$, massa $m$. Johdetaan heilahduskulmalle $\varphi=\varphi(t)$ DY.




$$ma = F \;\big|\; a=\ell\varphi'',\ F=-mg\sin\varphi$$
$$m\ell\varphi'' = -mg\sin\varphi$$
$$\ell\varphi'' + g\sin\varphi = 0$$
$$\varphi'' + \tfrac{g}{\ell}\sin\varphi = 0.$$

Tämä ei ole lineaarinen DY. Jos oletetaan, että heilahduskulman suurin arvo $\varphi_{\max}$ on aika pieni, esim. alle $\pi/18\ rad\ (=10^o)$, niin

$$\sin\varphi \approx \varphi \qquad (sillä\ \lim_{\varphi\to 0}\tfrac{\sin\varphi}{\varphi}=1).$$

Näin DY saadaan linearisoiduksi:

$$\varphi'' + \tfrac{g}{\ell}\varphi = 0 \;\Big|\; \text{Merkitään } \tfrac{g}{\ell}=k^2 \;\;\therefore \varphi''+k^2\varphi=0$$

kar. yhtälö: $r^2+k^2=0 \;\;\therefore r=\pm\sqrt{-k^2}=\pm ki$

$$\therefore \varphi = \underbrace{e^{0t}}_{=1}(C_1\sin kt + C_2\cos kt).$$

$$\begin{cases} t=0 \\ \varphi=0 \end{cases} \Rightarrow C_2=0 \;\;\therefore \varphi = C_1\sin kt.$$

Toisen integrointivakion $C_1$ määrittäminen ei käy alkuehdon avulla aivan tavanomaisesti, vaan seuraavalla päättelyllä. Koska sinin suurin arvo on 1 ja $\varphi$:n suurin arvo on $\varphi_{\max}$, niin täytyy olla $C_1=\varphi_{\max}$. Siis

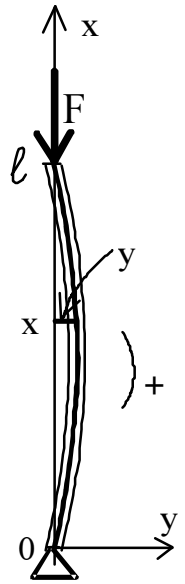
$$\varphi = \varphi_{\max}\sin kt\ .$$

Tästä saadaan tavallinen heilahdusajan $T$ laskukaava seuraavasti:

$$\begin{cases} t = \frac{T}{4} \\ \varphi = \varphi_{\max} \end{cases} \Rightarrow \varphi_{\max} = \varphi_{\max} \sin k\tfrac{T}{4} \Rightarrow \sin k\tfrac{T}{4} = 1$$

$$\therefore k\tfrac{T}{4} = \tfrac{\pi}{2}\ (+n\cdot 2\pi)\ \therefore \underline{\underline{T}} = 2\pi\tfrac{1}{k} = \underline{\underline{2\pi\sqrt{\tfrac{\ell}{g}}}}.$$

***Esim.10** ***Nurjahduksen*** perustapaus. Taivutusmomentti kohdassa $x$ on




$$M_t = F \cdot y\,.$$

Sijoitetaan tämä taipumaviivan diff.yhtälöön:

$$y'' = -\tfrac{M_t}{EI} = -\tfrac{F}{EI}\,y = -k^2 y \quad (k = \sqrt{\tfrac{F}{EI}})$$

$$\therefore y'' + k^2 y = 0 \;\Big|\; r^2 + k^2 = 0 \ \therefore r = \pm ki$$

$$\therefore y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C_2 = 0 \ \therefore y = C_1 \sin kx$$

$$\begin{cases} x = \ell \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 \sin k\ell = 0$$

Tästä lähtien käsittely ei ole "tavanomaista" vaan tapahtuu seuraavasti. Koska $C_1 \sin k\ell = 0$, niin

1) Joko $C_1 = 0 \Rightarrow$ taipumaviivan yhtälö on $y = 0$

$\Rightarrow$ ei nurjahdusta

2) Tai: $\sin k\ell = 0 \Rightarrow k\ell = n\cdot\pi\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

$$\therefore \sqrt{\tfrac{F}{EI}}\,\ell = n\cdot\pi$$

$$F = \frac{n^2\pi^2 EI}{\ell^2}$$

Siten pienin voima, jolla nurjahdus tapahtuu, saadaan kun $n = 1$:

$$F = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}\,.$$

Nurjahdus eroaa palkin taivutuksesta mm. siten, että jos vaikuttava voima on niin suuri, että nurjahdus tapahtuu, palkki "taipuu alas asti" ts. niin paljon, että alku- ja loppupäät yhtyvät.

## HARJOITUKSIA

### A

**2.1** a) $y''+16y'+64y=0$, b) $y''+4y=0$. c) $y''+2y'+y=e^{2x}$.

**2.2** $y''-y=e^{-x}, \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ y'=1/2 \end{cases}$.

**2.3** a) $y''-4y=e^{-x}$, b) $y''+y=\sin x$.

**2.4** Kappaleeseen, jonka massa $m=1$, vaikuttaa harmoninen voima $F=-s$. a) Johda liikkeelle $s=s(t)$ DY ja ratkaise se, kun hetkellä $t=0$ kappale on kohdassa $s=1$ ja sillä on nopeus $v=1$. b) Yhdistä sini- ja kosinikomponentit yhdeksi siniaalloksi. Ohje: Koska komponenteilla on sama amplitudikin, yhdistäminen käy helposti kaavan $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+\pi/4)$ avulla. c) Piirrä kuvaaja.

**2.5** Ratkaise Esimerkin 7 edellä mainitut kaksi vaimennetun värähdysliikkeen harjoitusta a) **Harj. A** ja b) **Harj. B** sekä kolmantena

c) $m=1, F_1=-5s, F_2=-2v,\ s(0)=v(0)=1$.

### B

**2.6** a) $y''+4y=6\sin x-3\cos x$, alkuehtoina $\begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$ *ja* $\begin{cases} x=0 \\ y'=6 \end{cases}$,

b) $y''+2y'=8\sin 2x$, $y(0)=1, y'(0)=0$.

**2.7** Ratkaise Esimerkin 3 DY (vastaus esimerkin yhteydessä).

**2.8** Seuraavista DY:istä ainakin yksi vaatii "vajautensa" vuoksi x:llä kerrotun yritteen. Ratkaise nämä DY:t

a) $y''-4y=2x+1$, b) $y''-4y'=1-8x$, c) $y''+y'=\sin x$.

**Huom.** *Ole yleisesti tarkkana, kun muodostat "vajaalle" DY:lle kar. yhtälön*. Esim. c)-kohdassa väärä kar. yhtälö $r^2+1=0$ antaisi homog. DY:lle ratkaisun $C_1\sin x+C_2\cos x$ ja sitten olisi loogista käyttää $x$:llä kerrottua yritettä (joka kuitenkin johtaa ristiriitaan).

**2.9** Määritä DY:n $y'' + 8y' + 7y = 0$ sellainen ratkaisukäyrä, joka leikkaa $x$-akselin origossa $45^o$ kulmassa.

**2.10** Määritä DY:n $y'' - 4y = 4$ a) yleinen ratkaisu, b) sellainen yksityisratkaisu, joka sivuaa suoraa $y = 2x$ origossa.

**2.11** Ratkaise $y'' - 2y' + y = \frac{1}{2}x^2 + 1$, alkuehtoina $y(0) = 1, y'(0) = 2$.

**2.12** Kappaleeseen, jonka massa $m = 2$, vaikuttavat voimat $F_1 = -8s$ ja $F_2 = 6\sin t - 3\cos t$. Johda funktiolle $s = s(t)$ DY ja ratkaise se, kun $s(0) = 3$ *ja* $v(0) = 2$.

**2.13** Kappaleeseen, jonka massa = 1, vaikuttaa harmoninen voima $-9s$, vaimentava voima $-6v$ ja pakkovoima $4e^{-2t}$. Muodosta ja ratkaise liikkeen DY.

**2.14** Kappaleeseen, jonka massa $m$ = 2, vaikuttavat voimat $F_1 = -4v$ ja $F_2 = 10\sin 2t$. Muodosta matkalle $s = s(t)$ DY ja määritä sen yleinen ratkaisu.

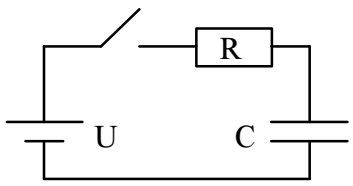
**2.15** Kappaleeseen, jonka massa = 1, vaikuttavat voimat $F_1 = -2v$ ja $F_2 = 8\sin 2t$. Muodosta matkalle $s = s(t)$ DY ja ratkaise se, kun $s(0) = 1$ ja $v(0) = 0$.

**2.16** Ratkaise Esimerkin 4 diff.yhtälöt a) ja b).

## C

**2.17** Kappaleeseen vaikuttaa a) vain harmoninen voima $F = -ks$, b) myös vaimentava voima $F = -\beta v$, c) näiden lisäksi pakkovoima $F_o \sin \omega t$. Merkitään $\frac{k}{m} = {\omega_o}^2$, $\frac{\beta}{m} = 2\delta$ ja $\frac{F_o}{m} = K_o$. Muodosta näiden kolmen tapauksen diff.yhtälöt.

**2.18** Viereisen kuvan mukaisessa $RC$-piirissä katkaisija suljetaan hetkellä $t$ = 0, jolloin virta $i$ kasvaa heti ohmin lain mukaiseen arvoon ja kondensaattori alkaa varautua. a) Muodosta $i$:lle DY ja ratkaise se. b) Laske varauksen $q$ lauseke (integroi $i(t)$:n lauseke).



**2.19** Ratkaise *RCL*-piiri erityisarvoilla $U = 10\,V$, $R = 2\,\Omega$, $C = \frac{1}{5}F$, $L = 1H$. Katkaisija suljetaan hetkellä $t = 0$, jolloin kondensaattori on varaukseton.

**2.20** *RCL*-piirissä $R = 16\,(\Omega), L = 0{,}02\,(H), C = 2 \cdot 10^{-4}\,(F)$, $U = 12\,(V)$. a) Muodosta varauksen yleinen lauseke. b) laske *i*:n lauseke, kun $q(0) = i(0) = 0$. Myöhemmin virtapiirejä käsitellään ns. *Laplace-muunnosten* avulla.

**2.21** Ratkaise $y''' - 3y'' + 2y' = e^x$ kahdella eri tavalla: a) käyttämällä karakteristista yhtälöä ja yritettä samaan tapaan kuin edellä, b) merkitsemällä $y' = u$, jolloin saat *u*:lle 2. kertaluvun diff. yhtälön.

**2.22** Ratkaise $y'' + \frac{1}{x}y' = x,\ x > 0$ merkitsemällä $y' = u$ ja käyttämällä vakion variointia (joka esiteltiin edellisen luvun C-tehtävissä).

**2.23** Todista, että DY:llä $x^2y'' - 3xy' + y = 0$ on muotoa $y = x^r$ oleva ratkaisu ja määritä r.

**2.24** Ratkaise DY-ryhmä $\begin{cases} y' + z' + 2y = 2x \\ y' - z' + 2z = 2x + 1 \end{cases}$, missä $y = y(x), z = z(x)$.

**2.25** Seuraavassa tehtävässä saadaan liikkeelle 1. kertaluvun DY, joka muodostetaan samantapaisesti kuin harmonisessa liikkeessä: Putoavaan kappaleeseen vaikuttaa maan vetovoima $F = mg$ ja ilmanvastus, joka on verrannollinen nopeuden johonkin potenssiin: $F = kv^r$.

a) Muodosta *nopeudelle v* DY. b) Ratkaise DY siinä tapauksessa, että $r = 1$. c) Laske tapauksessa $r$ = 2 rajanopeus $v_\infty$ ts. nopeuden raja-arvo, kun $t \to \infty$.

Ohje: Rajanopeus saadaan selville DY:stä *ratkaisematta diff. yhtälöä*, sillä kun $t \to \infty$, niin nopeuskäyrän tangentin kulmakerroin eli v' lähenee nollaa (koska nopeus vakioituu).

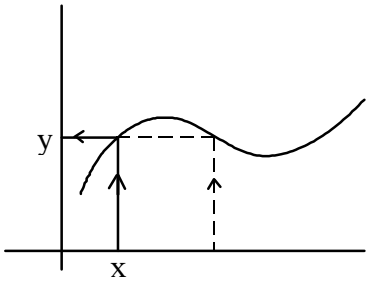
**2.26** Kanootti (massa m) työnnetään liikkeelle nopeudella 5 (*m/s*).

a) Johda kanootin kulkemalle matkalle *s* = *s*(*t*) diff.yhtälö ja ratkaise se, kun oletetaan, että kanoottiin vaikuttaa vain väliaineen vastus, joka on on suoraan verrannollinen nopeuteen (*F* = –*kv*).

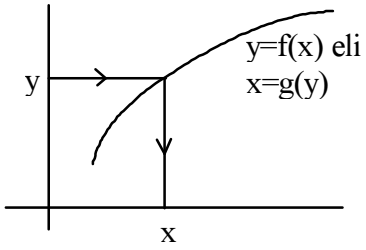
b) Minkä muodon ratkaisu saa, jos tiedetään, että kanootti pysähtyy 15 *m* päähän?

# 3 Trigonometristen funktioiden käänteisfunktiot

## 3.1 Käänteisfunktio ja sen derivaatta



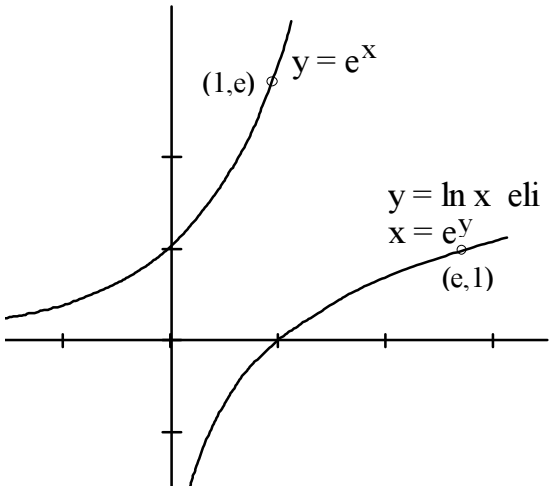

Funktion $f$ perusominaisuus on se, että jokaista $x$:n arvoa, joka kuuluu määrittelyjoukkoon, vastaa yksikäsitteinen $y$:n arvo. Nämä $y$:n arvot eivät aina ole eri suuria. Esim. paraabelilla $y = x^2$ $x$:n arvoja +2 ja –2 vastaa sama $y$:n arvo 4.




Jos funktio kasvaa tai vähenee aidosti, niin eri $x$:n arvot kuvautuvat erisuurille $y$:n arvoille. Siten tällaisilla funktioilla $y = f(x)$ jokaista $y$:n arvoakin vastaa yksikäsitteinen $x$:n arvo $x = g(y)$ ts. $g$ täyttää funktion perusominaisuuden. Yhtälön $x = g(y)$ määrittelemää funktiota $g$ sanotaan $f$-funktion ***käänteisfunktioksi*** ja sen merkkinä on (teoreettisissa tarkasteluissa) $f^{-1}$. Tässä yhteydessä $^{-1}$ ei tarkoita tavallista negatiivista eksponenttia.

**Esim. 1**

| funktio | | käänteisfunktio |
|---|---|---|
| $y = 2x + 1$ | $\Leftrightarrow$ | $x = \frac{y-1}{2}$ |
| $y = x^3$ | $\Leftrightarrow$ | $x = \sqrt[3]{y}$ |
| $y = \ln x$ | $\Leftrightarrow$ | $x = e^y$. |




Koska esim. $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$, ts. kyseessä on sama yhtälö vain kahdessa eri muodossa, niin näiden funktioiden kuvaajat $xy$-koordinaatistossa ovat samat. Jos jälkimmäisessä yhtälössä vaihdetaan $x$ ja $y$ keskenään, jolloin $x$ tulee riippumattoman muuttujan (eli argumentin) ja $y$ funktion merkiksi, niin uuden yhtälön $y = e^x$ kuvaaja on entiselle kuvaajalle symmetrinen suoran $y = x$ suhteen.

**Lause 1** *Käänteisfunktioiden derivaatat ovat toistensa käänteislukuja*:

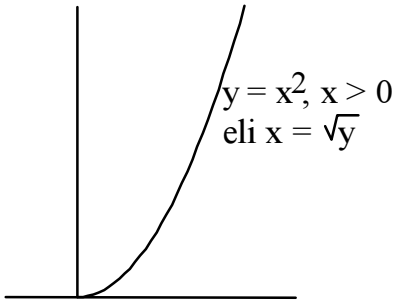
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

**Esim. 2** Jos logaritmifunktion derivoimissääntö tunnetaan, sen avulla voidaan johtaa eksponenttifunktion derivoimissääntö seuraavasti. Koska $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$, niin

$$D\,e^x = \frac{1}{D \ln y} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x.$$

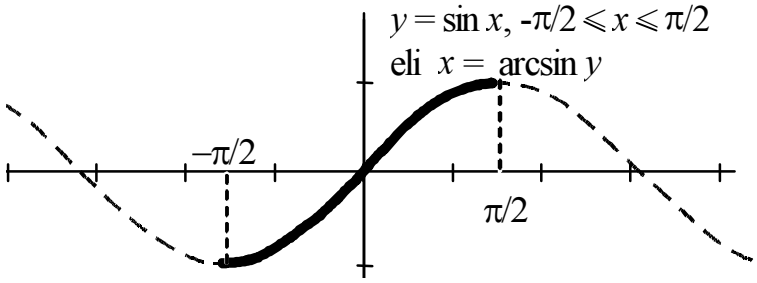
Joskus funktio saadaan ***aidosti monotoniseksi***, ts. aidosti kasvavaksi tai vähenevästi, kun rajoitetaan funktion määrittelyjoukkoa. Siten funktiolle saadaan käänteisfunktio. Esimerkiksi funktiolla $y = x^2$ *rajoitettuna x:n positiivisiin arvoihin* on *käänteisfunktio*:

$$y = x^2,\ x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{y}.$$




Vastaavasti funktiolla $y = \sin x$ rajoitettuna väliin $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ (vrt. seuraava kuva) on käänteisfunktio $x = \arcsin y$ (lue: *arkussini y*).

Ohjelmistoissa on usein lyhenteen arcsin tilalla **asin** tai **asn**. (Ehkä matematiikassakin olisi syytä siirtyä näihin.)




## 3.2 Arkusfunktiot

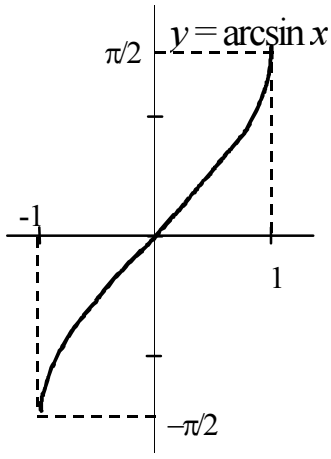
**Arkussini**. Edellisen mukaan

$$y = \sin x,\ -\pi/2 \le x \le \pi/2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \arcsin y.$$

Kun tässä vaihdetaan $x$ ja $y$ keskenään ja luetaan päättely oikealta vasemmalle, saadaan tulos

(1) $\boldsymbol{y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y,\ -\pi/2 \le y \le \pi/2}$.

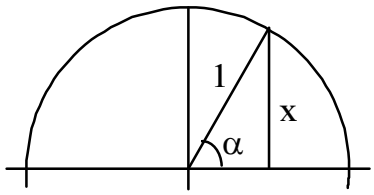
Täten käyrä $y = \arcsin x$ on sama käyrä kuin $x = \sin y, -\pi/2 \le y \le \pi/2$, ts. kyseessä on



pätkä $y$-akselin ympärillä aaltoilevasta sinikäyrästä.

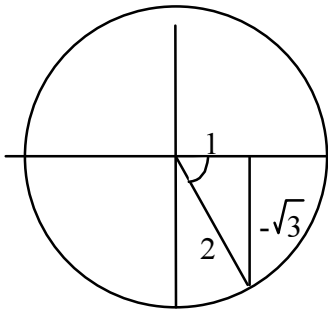
Tuloksen (1) mukaan $y$ eli arcsin $x$ toteuttaa ehdot $\sin y = x$, $-\pi/2 \le y \le \pi/2$, ts.

***arcsin x on sellainen kulma y väliltä*** $-\pi/2 \le y \le \pi/2$***, että sen sini on x.***




α = arcsin x
(α on kulma, jonka sini on x)

Siten esim. arcsin $\frac{1}{2}$ = *sellainen kulma väliltä* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, *että sen sini on* $\frac{1}{2}$. Tällainen kulma on $\frac{\pi}{6}$. Siis




**Esim. 3** $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

$\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\pi}{3}$ (kuva),

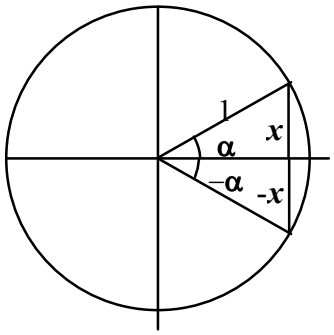
$\arcsin 2$ ei ole määritelty, sillä ei ole olemassa kulmaa, jonka sini olisi 2,

$\arcsin(-0{,}234) \approx -0{,}236$ (laskimessa ehkä $\sin^{-1}$ tai inv sin),

$\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$.

*Yleisesti

(2) $\quad \mathbf{\arcsin(-x) = -\arcsin x}$,




sillä viereisessä kuvassa kulma, jonka sini on $x$, on $\alpha$ ja kulma, jonka sini on $-x$, on $-\alpha$, ts.

$\arcsin x = \alpha$ ja $\arcsin(-x) = -\alpha$.

*Yhtälön (2) mukaan **arcsin x** *on pariton funktio*.

Koska $y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y, -\pi/2 \le y \le \pi/2$, niin lauseen 1 nojalla

$$D\arcsin x = \frac{1}{D\sin y} = \frac{1}{\underbrace{\cos y}_{>0}} = \frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Siis

(3) $\quad \boxed{\boldsymbol{D\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}}$

**Esim. 4** $D\arcsin 2x = \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$ (sisäfunktiona $2x$).

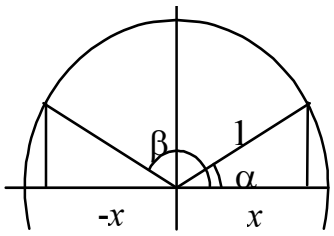
**Esim. 5** $\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} == \Big|_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \arcsin x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$.

***Arkuskosini.** Kun kosinifunktio rajoitetaan välille $0 \ldots \pi$, se on monotonisesti vähenevä ja saa (kertaalleen) kaikki arvonsa –1...1. Täten voidaan määritellä

$$y = \arccos x \;\Leftrightarrow\; x = \cos y, 0 \le y \le \pi .$$

Siis $\arccos x$ *on sellainen kulma väliltä* $[0, \pi]$, *että sen kosini on* $x$.

**Esim. 6** $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, $\arccos(-\frac{1}{2}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

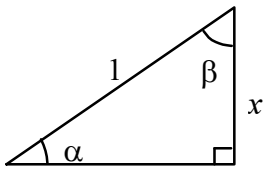


α = arccos *x*
β = arccos(-*x*)

Yleisesti (vrt. kuva)

(4) $\mathbf{\arccos(-x) = \pi - \arccos x}$.

Arkuskosini *ei siis ole* parillinen funktio kuten kosini. Arkuskosini voidaan esittää arkussinin avulla seuraavasti (vrt. viereinen kuva):



α = arcsin *x*
β = arccos *x*
β = π/2 –α

(5) $\mathbf{\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x}$.

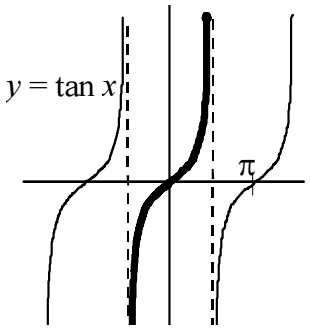
Tästä seuraa, että

$$\boldsymbol{D \arccos x = -D \arcsin x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} .$$

**Arkustangentti**. Tangettifunktiolla rajoitettuna avoimelle välille $-\frac{\pi}{2} \ldots \frac{\pi}{2}$ on käänteisfunktio:

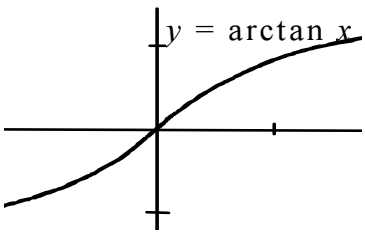
$y = \arctan x \;\Leftrightarrow\; x = \tan y, \; -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Siis $\arctan x$ *on sellainen kulma väliltä* $-\frac{\pi}{2} \ldots \frac{\pi}{2}$, *että sen tangentti on* $x$.




**Esim. 7** $\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$,

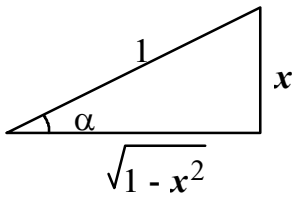
$\arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$.




*Yleisesti: arctan *x* on *pariton funktio*.

*Seuraavalla tuloksella voi olla käyttöä mm. ohjelmoinnissa:

(6) $$\textbf{arcsin}\, x = \textbf{arctan}\, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$




*sillä viereisessä kuvassa $\alpha$ on sekä kulma, jonka sini on $x$ että kulma, jonka tangentti on $x / \sqrt{1-x^2}$. (Funktioiden parittomuuden takia voidaan olettaa, että $x > 0$.)

Koska $y = \arctan x \;\Leftrightarrow\; x = \tan y,\; -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, niin

$$D\arctan x = \frac{1}{D\tan y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Siis

(7) $$\boxed{\boldsymbol{D}\,\textbf{arctan}\, x = \frac{1}{1+x^2}}.$$

**Esim. 8** 1) $D\arctan(3x+1) = \frac{1}{1+(3x+1)^2}\cdot 3 = \frac{3}{9x^2+6x+2}$.

2) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \Big|_{-1}^{1} \arctan x = \frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$.

## 3.3 Integroimismenetelmiä. Areafunktiot

Arkussinin ja arkustangentin derivoimiskaavoilla on integroinnissa merkitystä laajemmaltikin, sillä eräät integraalit palautuvat näihin, kun käytetään apuna *sijoitusta ja neliöintiä*.

**Esim. 9** $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} \quad \Big| \; sij.\; 2x = t \;\therefore\; 2dx = dt$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{1-t^2}} = \tfrac{1}{2}\arcsin t + C = \tfrac{1}{2}\arcsin 2x + C.$$

***Esim. 10** $$\int \frac{dx}{4x^2+4x+2} = \int \frac{dx}{(2x+1)^2+1} \;\Bigg|\; \begin{matrix} sij.\; 2x+1 = t \\ 2dx = dt \end{matrix}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}dt}{t^2+1} = \tfrac{1}{2}\arctan t + C = \tfrac{1}{2}\arctan(2x+1) + C.$$

**Esim. 11** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} \;\Big|\; \begin{array}{l} sij.\ x = at \\ \quad dx = adt \end{array}$

$$= \int \frac{adt}{a^2t^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{a}\arctan t + C = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

Siis

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C}$$ ja vastaavasti $$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C}.$$

Kaavastossa on kolme lähes samannäköistä integraalia, mutta niiden tulokset ovat eräitä logaritmifunktioita:

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \\ \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C,\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C. \end{array}}$$

**Esim. 12** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{4-x^2} = -\int_0^1 \frac{dx}{x^2-4} = -\Big|_0^1 \frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| = -\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{-1}{3}\right| - \ln|-1|\right)$

$$= -\tfrac{1}{4}\ln\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{4}\ln 3 \quad (\textit{sillä}\ \ln\tfrac{1}{a} = \ln 1 - \ln a = -\ln a).$$

Edelliset tulokset voidaan perustella esim. derivoimalla oikeat puolet. Varsinaisesti ne ovat peräisin hyperbelifunktioiden käänteisfunktioiden eli ns. ***areafunktioiden*** derivoimiskaavoista.

*Koska hyperbelifunktiot ovat eksponenttifunktioyhdelmiä, on luonnollista, että niiden käänteisfunktiot ovat eräitä logaritmifunktioita. Esim.

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Leftrightarrow x = ar\sinh y = \ln(y + \sqrt{y^2+1}).$$

*Tod. Ratkaistaan $x$ yhtälöstä $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = y$:

$$e^x - e^{-x} = 2y \;\Big|\cdot e^x$$

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; e^x = y \pm \sqrt{y^2+1} \;\Big|-\ \text{ei käy, sillä } e^x > 0$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2+1}\ ).$$

## HARJOITUKSIA

### A

**3.1** Jos mahdollista, laske seuraavat arvot ilman laskinta, taulukkoja tms. (erikoiskolmion tai trig.ympyrän avulla) ja tarkista tulokset laskimen avulla. Tulokset radiaaneina.

a) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$, b) $\arcsin 1$, c) $\arcsin 0$, d) $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$

e) $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \arcsin(-\frac{1}{2})$, f) $\arcsin\frac{3}{5}$ g) $\arcsin\frac{5}{4}$,

h) $2\arcsin(-1)+3\arcsin(-\frac{1}{2})$.

**3.2** Kuten edellinen, mutta arkussinin tilalla arkuskosini.

**3.3** Kuten 3.1., mutta a) $\arctan\sqrt{3}$, b) $\arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}})$, c) $\arctan 2$,

d) $3\arctan^2(-\frac{1}{\sqrt{3}})$, e) $\arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}})^2$.

**3.4** Derivoi a) $\arcsin\frac{1}{x}$, b) $\ln\arcsin x$, c) $2\arcsin 3t$, d) $x^2\arcsin x$.

**3.5** Derivoi a) $\arctan 3x$, b) $\arctan\sqrt{x}$ c) $\arctan e^{2x}$.

**3.6** a) $\int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, b) $\int\frac{2xdx}{\sqrt{1-x^2}}$, c) . $\int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2}\frac{2dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

**3.7** a) $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$, b) $\int_0^1\frac{xdx}{1+x^2}$, c) $\int_{-1}^{\sqrt{3}}\frac{ds}{s^2+1}$.

**3.8** Laske sopivan sijoituksen avulla $\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{dx}{1+9x^2}$.

**3.9** a) $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+9}$, b) $\int\frac{ds}{s^2-9}$, c) $\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-4}}$.

**3.10** Laske neliöinnin ja sopivan sijoituksen avulla $\int\frac{dx}{x^2+6x+13}$.

**3.11** Laske neliöinnin ja sopivan sijoituksen avulla $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x}}$.

## B

**3.12** Johda lauseen 1 avulla funktion $y = \sqrt[3]{x}$ derivaatan lauseke.

**3.13** a) $D \arcsin\sqrt{x}$, b) $D \arcsin(2x-1)$, c) $D \arccos\frac{2}{x+1}$.

**3.14** Laske $D \arctan\dfrac{1+x}{1-x}$.

**3.15** Laske sijoituksen $x = 2\sin t$ avulla $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$ ja tarkista tulos kaavastosta löytyvän kaavan

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \tfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{a^2}{2}\arcsin\tfrac{x}{a} + C$$

avulla. (Tämä kaava johdettaisiin samantapaisesti.)

**3.16** Laske $\arcsin(-t)$ *ja* $\arccos(-t)$, jos tiedetään, että $\arcsin t = \dfrac{\pi - b}{4}$.

**3.17** a) $\int_{-1}^{3} \dfrac{dx}{3+x^2}$, b) $\int \dfrac{dx}{4x^2+4x+3}$, c) $\int_{3}^{4} \dfrac{du}{\sqrt{u^2-4}}$.

**3.18** a) $\int \dfrac{2x^2+1}{x^2+1}dx$ (suorita jako) b) $\int \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$, c) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1+9x^2}}$

## C

**3.19** Esitä yhtälön $\sin x = a$ ratkaisut arkusfunktioita (lukua $\arcsin a$) käyttäen siinä tapauksessa, että a) $a \geq 0$, b) $a < 0$ (Vihje: mikä on peruskulma?)

**3.20** Kuten edellinen, mutta arkussinin sijalla 1) arkuskosini, 2) arkustangentti.

**3.21** Osoita, että jos a > 0, niin

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{sign\ x}{a}\arcsin\frac{a}{x} + C,$$ missä *sign* $x$ on $x$:n etumerkkifunktio (*signum*), ts. $sign\ x = \begin{cases} 1, \text{ jos } x \geq 0 \\ -1, \text{ jos } x < 0 \end{cases}$.

**3.22** Esitä $\arccos x$ arkustangentin avulla.

**3.23** Tulos $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ perusteltiin vain kolmion avulla, ts. olettamalla, että $x$ on positiivinen. Todista se siinä tapauksessa, että $x$ on negatiivinen.

**3.24** Tulos **sin(arcsin *x*) = *x*** pitää paikkansa aina kun $\arcsin x$ on määritelty (ts. kun $|x| \le 1$), sillä aina "sini kulmasta, jonka sini on $x$, on $x$".
a) Määritä tämän avulla funktion $y = \arcsin 2x - \frac{3\pi}{4}$ käänteisfunktio.

Sen sijaan **arcsin(sin *x*)** ei aina ole = $x$, koska arkussinin arvon täytyy olla aina välillä $-\frac{\pi}{2} \ldots \frac{\pi}{2}$, mutta $x$ voi olla minkä kokoinen kulma tahansa. Ainoastaan, jos $x$ rajoitetaan välille $-\frac{\pi}{2} \ldots \frac{\pi}{2}$, niin $\arcsin(\sin x) = x$.

Niinpä esim. $\arcsin(\sin \frac{4\pi}{3}) = -\frac{\pi}{3}$ (sillä kulma, jonka sini on muuten sama kuin kulman $\frac{4\pi}{3}$ sini, mutta joka on välillä $-\frac{\pi}{2} \ldots \frac{\pi}{2}$, on $-\frac{\pi}{3}$. Laske vastaavasti seuraavat arvot ja tarkista tulokset laskimella:

b) $\arcsin(\sin 2)$, c) $\arcsin(\sin 4)$, d) $\arcsin(\sin 6)$. e) $\arcsin(\cos \frac{5\pi}{6})$.

**3.25** Laske yleisesti $\arcsin(\cos x)$, kun $x$ on a) välillä $\frac{\pi}{2} \ldots \pi$, b) välillä $\frac{3\pi}{2} \ldots 2\pi$. Ohje: Merkitse $\arcsin(\cos x) = y$, jolloin

$$\sin y = \underbrace{\cos x}_{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}, \; -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2} \;\Bigg|\; \begin{array}{l} \sin\alpha = \sin\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + n \cdot 2\pi \\ tai \; \alpha = \pi - \beta + n \cdot 2\pi \end{array} .$$

Ratkaise tästä kaikki $y$:n arvot ja valitse niistä oikea.

# 4 Murtofunktion integrointi

## 4.1 Perustapauksia

***Murtofunktiot*** ovat muotoa $\frac{a(x)}{b(x)}$, missä $a(x)$ ja $b(x)$ ovat polynomeja.

Aikaisemmissa luvuissa on esiintynyt lähinnä sellaisten murtofunktioiden integrointia, joiden nimittäjissä on vain yksi jaoton tekijä tai tällaisen tekijän potenssi. Seuraavassa esimerkissä on tällaisia "perustapauksia".

**Esim. 1**

$$a)\ \int \frac{dx}{2x+1} = \tfrac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{2x+1} = \tfrac{1}{2}\ln|2x+1| + C,$$

$$b)\ \int \frac{dx}{(2x+1)^3} = \tfrac{1}{2}\int (2x+1)^{-3}\cdot 2\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{(2x+1)^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{1}{4(2x+1)^2} + C,$$

$$c)\ \int \frac{x}{x^2+3}dx = \tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}dx = \tfrac{1}{2}\ln(x^2+3) + C,$$

$$d)\ \int \frac{dx}{x^2+4} = \tfrac{1}{2}\arctan\tfrac{x}{2} + C,$$

$$e)\ \int \frac{dx}{x^2-4} = \tfrac{1}{4}\ln\left|\tfrac{x-2}{x+2}\right| + C,$$

$$f)\ \int \frac{dx}{4x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(2x+1)^2+4} \quad \left|\begin{array}{l} sij.\ 2x+1=t \\ \qquad 2\,dx = dt \end{array}\right.$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}dt}{t^2+4} = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\arctan\tfrac{t}{2} + C = \tfrac{1}{4}\arctan\tfrac{2x+1}{2} + C.$$

***Jos osoittajan aste on ≥ nimittäjän aste, niin ennen integrointia on suoritettava jako*** joko jakokulmassa tai esim. seuraavalla tavalla:

**Esim. 2**

$$\int \frac{x}{1-2x}dx = -\tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{2x-1}dx = -\tfrac{1}{2}\int \frac{2x-1+1}{2x-1}dx$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int \left(1+\frac{1}{2x-1}\right)dx = -\tfrac{1}{2}\left(x+\tfrac{1}{2}\ln|2x-1|\right) + C$$

Jos suoritat jaon jakokulmassa, polynomien termien täytyy olla jakokulmassa $x$:n *alenevien potenssien* mukaisessa järjestyksessä. Kokeile esim.

$$\frac{4x^3-4x^2-23x+17}{2x^2+3x-2} = 2x-5+\frac{-4x+7}{2x^2+3x-2}.$$

Yleisesti yllä olevan esimerkin tapaisen jaon tulos on muotoa

$$\frac{a(x)}{b(x)} = q(x)+\frac{r(x)}{b(x)},$$

missä $q(x)$ on osamääräpolynomi ja $r(x)$ jakojäännöspolynomi, jonka aste on alempi kuin jakajapolynomin $b(x)$ aste.

Koska polynomi $q(x)$ on helppo integroida, tehtäväksi jää sellaisen murtofunktion integrointi, jossa osoittaja on alempiasteinen kuin nimittäjä.

## 4.2 Osamurtoihin jako

***Osamurtoihin jako*** on menetelmä, jolla sellainen supistetussa muodossa oleva murtofunktio, jonka *osoittaja on nimittäjää alempiasteinen ja jonka nimittäjässä on vähintään kaksi jaotonta tekijää*, voidaan "paloitella osiin" (osamurtoihin).

**Esim. 3** $I = \int \frac{-4x+7}{2x^2+3x-2}dx.$

(Vaihtoehtoinen esim. $\int \frac{x^2}{x^2+3x+2}\,dx$. Se vaatii ensin jaon.)

Nimittäjän 0-kohdat ovat $\frac{1}{2}$ *ja* $-2$, joten sen tekijöihin jako on

$$2x^2+3x-2 = 2(x-\tfrac{1}{2})(x+2) = (2x-1)(x+2)$$

Yritetään jakaa integroitava funktio kahteen osaan, kahden osamurron summaksi seuraavasti:

$$\frac{-4x+7}{(2x-1)(x+2)} \equiv \frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x+2}.$$

Kertoimien $A$ ja $B$ määrittämistä varten kerrotaan tämä yhtälö vasemman puolen nimittäjällä:

$$\frac{-4x+7}{(2x-1)(x+2)} \equiv \frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x+2} \quad \Big| \cdot(2x-1)(x+2)$$
$$-4x+7 \equiv A(x+2)+B(2x-1)$$

Kun ***verrataan vastinpotenssien kertoimia***, saadaan $A$:n ja $B$:n määrittämiseksi seuraava yhtälöpari:

$$+\left\{\begin{array}{l|ll} A+2B=-4 & \cdot 1 & (x\text{:n kertoimet}) \\ 2A-B=7 & \cdot 2 & (\text{vakiotermit}) \end{array}\right.$$

$$5A=10 \qquad \therefore A=2,\ B=-3$$

$$\therefore I=\int \left(\frac{2}{2x-1}-\frac{3}{x+2}\right)dx=\ln|2x-1|-3\ln|x+2|+C.$$

Yleisesti voidaan todistaa, että

1) *jokainen reaalikertoiminen polynomi jakautuu* ***R****:ssä jaottomiin tekijöihin, jotka ovat lineaarisia tai 2. astetta*,

2) *jokainen (reaalikertoiminen, supistettu) murtofunktio, jonka osoittaja on alempiasteinen kuin nimittäjä, voidaan jakaa osamurtoihin. Osamurtokehitelmän muoto riippuu nimittäjän tekijöistä seuraavan neljän esimerkin mukaisesti*:

1) ***Nimittäjän tekijät ovat erisuuria ja lineaarisia***:

$$\frac{-4x+7}{(2x-1)(x+2)}\equiv\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x+2}$$ (Esim. 3 edellä),

2) *Nimittäjässä on* ***moninkertainen lineaarinen tekijä***:

$$\frac{3x^3-7x^2+4x+1}{x(x-1)^3}\equiv\frac{A}{x}+\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{x-1}}+\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{(x-1)^2}}+\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{(x-1)^3}}$$

3) *Nimittäjässä on* ***jaoton 2. asteen tekijä***:

$$\frac{3x^2+x-4}{(x-1)\underbrace{(x^2+2x+3)}_{jaoton\ (diskr.<0)}}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{\mathbf{Bx+C}}{x^2+2x+3}$$

*4) *Nimittäjässä on* ***moninkertainen jaoton 2. asteen tekijä***:

$$\frac{3x^4-x^3+4x^2-2x+1}{x\underbrace{(x^2+1)}_{jaoton}^2}\equiv\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

(Murtofunktioiden 2) - 4) kertoimet ovat seuraavat:

2) $A=1, B=2, C=0, D=-1$, 3) $A=1, B=2, C=-1$.

4) $A=1, B=2, C=-1, D=0, E=-1$.)

**Esim. 4** $\int \frac{x-1}{x^2(x^2+4)}\,dx$ $\Bigg|$ $x^2$ on 2 - kertainen lineaarinen tekijä; $x^2+4$ on jaoton 2. asteen tekijä

$$\frac{x-1}{x^2(x^2+4)} \equiv \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4} \;\Big|\; \cdot x^2(x^2+4)$$

$$x-1 \equiv Ax(x^2+4)+B(x^2+4)+(Cx+D)x^2$$

Kun verrataan vastinpotenssien kertoimia, saadaan seuraava yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} A+C=0 & (x^3{:}n \text{ kertoimet}) \\ B+D=0 & (\mathrm{x}^2{:}n \text{ kertoimet}) \\ 4A=1 & (x{:}n \text{ kertoimet}) \\ 4\mathrm{B}=-1 & (\text{vakiotermit}) \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} A=\frac{1}{4}, B=-\frac{1}{4} \\ C=-\frac{1}{4}, D=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\therefore I=\tfrac{1}{4}\int \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{-x+1}{x^2+4}\right)dx=\tfrac{1}{4}\left(\ln|x|+\frac{1}{x}+\int \frac{1-x}{x^2+4}\,dx\right).$$

Jäljellä olevan integraalin laskeminen:

$$\int \frac{1-x}{x^2+4}\,dx=\int \frac{dx}{x^2+4}-\tfrac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+4}=\tfrac{1}{2}\arctan\tfrac{x}{2}-\tfrac{1}{2}\ln(x^2+4)+C.$$

Vastaus voidaan kirjoittaa esim. muotoon

$$I=\tfrac{1}{8}\left(\ln\frac{x^2}{x^2+4}+\tfrac{2}{x}+\arctan\tfrac{x}{2}\right)+C.$$

Kokeile, missä muodossa valmisohjelmat (MathCad, Matlab, Mathematica, Maple tms.) antavat edellisen vastauksen. Esim. Mathematica-ohjelma laskee osamurtokehitelmän *Apart*-käskyllä. Kehitelmän saat takaisin yhdeksi murtofunktioksi *Factor*-käskyllä.

Jos nimittäjä muodostuu ainoastaan yhden lineaarisen tekijän potenssista ja osoittajassakin on $x$:ää, vaatii sekin osamurtoihin jaon, mutta kehitelmä saadaan joskus helpommin kuin edellisellä tavalla seuraavasti:

$$\frac{3x-1}{(x-2)^2} \equiv \frac{3(x-2)+5}{(x-2)^2} \equiv \frac{3}{x-2}+\frac{5}{(x-2)^2}.$$

*Esim. muotoa $\dfrac{Ax+B}{x^2+2x+5}$ oleva osamurtotermi integroidaan neliöimällä nimittäjä ja käyttämällä sijoitusta sillä tavoin kuin arkusfunktioita koskevan luvun loppuosassa on esitetty.

*Neliöinnin ja sijoituksen avulla esim. funktion $\dfrac{Ax+B}{(x^2+2x+5)^2}$ integrointi johtaa integraaliin $\int \dfrac{1}{(t^2+1)^2}dt$, jolle löytyy kaavastosta palautuskaava.

*Osamurtokehitelmiä tarvitaan paitsi integroinnissa myös esim. *Laplace-muunnosten* yhteydessä.

*Esitetään vielä muutama tekijöihinjakoesimerkki:

$$x^3+2x^2-5x-6=(x+1)(x^2+x-6)=(x+1)(x-2)(x+3),$$

$$2x^3+x^2+7x-4=2(x-\tfrac{1}{2})(x^2+...)=(2x-1)\underbrace{(x^2+x+4)}_{\text{jaoton, } D=1-16<0},$$

$$x^3-2x-5=(x-2{,}095...)(x^2+...) \text{ (haarukointi tms. ja jakokulma),}$$

$$x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-2x^2$$
$$=(x^2+1-\sqrt{2}x)(x^2+1+\sqrt{2}x).$$

## HARJOITUKSIA

### A

**4.1** a) $\int_{-1}^{0}\dfrac{x}{x-1}dx$, b) $\int\dfrac{x}{1-x}dx$, c) $\int\dfrac{4x^2}{2x+1}dx$.

**4.2** a) $\int\dfrac{x-1}{x^2+1}dx$ b) $\int_0^1\dfrac{x^2+2x}{x^2+1}dx$.

**4.3** Muodosta osamurtokehitelmä: a) $\dfrac{x-4}{x^2+2x}$, b) $\dfrac{2}{s^2-1}$.

**4.4** Muodosta osamurtokehitelmä ja integroi

a) $\int\dfrac{x-1}{x^2+x}dx$, b) $\int\dfrac{5}{2x^2-7x+3}dx$.

**4.5** Mikä on funktion $\dfrac{s^2-3s-2}{s^3+s^2+s}$ osamurtokehitelmä?

**4.6** Laske $\int_2^3 \frac{x^2+1}{x^3-x^2}\,dx$.

**4.7** Esitä funktion a) $\frac{ax^2+b}{x^2(x^2-2x+2)^3}$, b) $\frac{ax^2+b}{x^2(x^2-2x+1)^2}$ osamurtokehitelmän muoto (kertoimien arvoja ei tarvitse laskea)?

## B

**4.8** a) $\int \frac{x^2}{x^2+x-2}\,dx$, b) $\int \frac{x^2-3x+26}{(x+1)(x^2+9)}\,dx$.

**4.9** Laske $\int \frac{dx}{4x^2-4x}$ a) käyttämällä osamurtoihin jakoa, b) neliöinnin ja sijoituksen avulla, c) kaavaston kaavalla $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$.

**4.10** Muodosta funktion $\frac{4s^2+2s}{(s^2+1)(s+1)^2}$ osamurtokehitelmä.

**4.11** a) $\int \frac{3x+5}{x^2+2x}\,dx$, b) $\int \frac{8x-4}{x^4+4x^2}\,dx$.

**4.12** a) $\int \frac{x^2+1}{x^3-x^2}\,dx$, b) $\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$.

## C

**4.13** $\int_0^1 \frac{dt}{t^3+1}$.

**4.14** $\int \frac{3x^2-x+2}{x^3+x-2}\,dx$.

**4.15** Voidaan todistaa, että (reaali-tai kompleksikertoiminen) polynomi jakautuu kompleksilukualueella lineaarisiin tekijöihin, ja jos $a+bi$ on polynomin nollakohta, niin samoin on $a-bi$. Tekijöiden $x-(a+bi)$ ja $x-(a-bi)$ tulo antaa reaalikertoimisen toisen asteen tekijän, joka on reaalilukujoukossa $\boldsymbol{R}$ jaoton (koska sen nollakohdat eivät ole reaaliset). Millaisia ovat näiden tulosten perusteella a) kolmannen, b) neljännen asteen reaalikertoimisen polynomin jaottomat tekijät reaalilukualueella?

# 5 Trigonometristen funktioiden integrointi

## 5.1 Perustapauksia

**Esim. 1** 1) $\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$,

2) $\int \tan\omega t\,dt = -\frac{1}{\omega}\int \frac{-\sin\omega t\cdot\omega}{\cos\omega t}dt = \frac{-1}{\omega}\ln|\cos\omega t|+C$,

Eräs päämenetelmä trigonometristen funktioiden integroinnissa on ***osittais-integrointi***. Kertaa se, ellet hallitse sitä hyvin (I osa, luku 7)!

Integraalien $\int \sin^2 x\,dx$ ja $\int \cos^2 x\,dx$ laskemiseen on aikaisemmin käytetty yleensä *palautuskaavaa*. Eksponentista 2 päästään eroon myös kaavoilla

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$\therefore \mathbf{\sin^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha),\ \cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)}.$$

**Esim. 2** $\int_0^{\pi/4}\sin^2 3t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(1-\cos 6t)dt = \frac{1}{2}\Big|_0^{\pi/4}(t-\frac{\sin 6t}{6})$

$$= \tfrac{1}{2}(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{1}{6}\sin\tfrac{3\pi}{2}) = \tfrac{\pi}{8} - \tfrac{1}{12}(-1) = \tfrac{\pi}{8}+\tfrac{1}{12}.$$

*Palautuskaavan käyttäminen olisi vaatinut ensin sijoituksen $3t = u$.

*Integraalin $\int \tan^2 x\,dx$ laskemisessa voidaan käyttää palautuskaavan sijasta tietoa $D\tan x = 1+\tan^2 x$ seuraavasti:

**Esim. 3** $\int \tan^2 5x\,dx = \int (\underbrace{1+\tan^2 5x}-1)\,dx = \frac{1}{5}\tan 5x - x + C.$

## 5.2 Tulot sin *ax* cos *bx* , sin *ax* sin *bx*, cos *ax* cos *bx*

Jos ***a*** = ***b***, niin otsikon mukaisten tulojen integroinnissa voidaan käyttää apuna kaavaa $\mathbf{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$ (vrt. Esim. 5 jäljempänä).

Jos taas $a \neq b$, nämä tulolausekkeet integroidaan siten, että muutetaan "*tulot summiksi*" seuraavien trigonometristen kaavojen avulla:

$$\begin{cases} \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right] \\ \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right] \\ \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right]. \end{cases}$$

**Esim. 4** $\int \sin 2t\cdot\cos 3t\ dt = \frac{1}{2}\int\left[\sin(-t)+\sin 5t\right]dt$

$= \frac{1}{2}\int\left[-\sin t+\sin 5t\right]dt = \frac{1}{2}(\cos t - \frac{1}{5}\cos 5t)+C.$

***Esim. 5** $\int_0^{T/4}\sin\omega t\cos\omega t\ dt = \frac{1}{2}\int_0^{T/4}\sin 2\omega t\ dt = -\frac{1}{4\omega}\Big|_0^{T/4}\cos 2\omega t$

$= -\frac{1}{4\omega}(\cos\frac{\omega T}{2}-1)$ $\quad\Big|$ jakso $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega} \therefore \omega T = 2\pi$

$= -\frac{1}{4\omega}(\cos\pi-1) = -\frac{1}{4\omega}(-1-1) = \frac{1}{2\omega}.$

## 5.3 Potenssilausekkeen $\sin^m x\ \cos^n x$ integrointi

**Esim. 6** $\int \sin^4 x\cdot\cos^3 x\ dx = \int \sin^4 x\cdot(1-\sin^2 x)\cos x\ dx$

$= \int \sin^4 x\cdot\cos x\ dx - \int \sin^6 x\cdot\cos x\ dx = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C.$

Jos siis ainakin toinen eksponentti on pariton, jätetään tästä potenssista yksi funktio muuttamatta (sisäfunktion derivaataksi) ja muu osa muutetaan toiseksi trig. funktioksi kaavan $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$ avulla.

**Esim. 7** $\int \sin^2 x\cdot\cos^4 x\ dx = \int (1-\cos^2 x)\cdot\cos^4 x\ dx$

$= \int \cos^4 x\ dx - \int \cos^6 x\ dx = \ldots$ (palautuskaava).

Jos siis kumpikin eksponentti on parillinen, joudutaan muuttamaan koko toisen funktion potenssi (pienempi) toiseksi kaavan $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$ avulla ja käyttämään palautuskaavaa.

Jälkimmäinen tapa kävisi myös Esimerkkiin 6, mutta se johtaisi oleellisesti pidempiin laskuihin (ja vastaus olisi aivan erinäköinen).

## 5.4 Sijoituksia

***Esim. 8** $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{1-\cos^2 x}$ $\Big|$ $sij.\ \cos x = t$, $\therefore -\sin x\,dx = dt$

$$= \int \frac{-dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C.$$

*Tässä esimerkissä sijoituksella päästiin kosinifunktiosta eroon. Sijoitus johti helpompaan integraaliin, koska osoittajassa oli etumerkkiä vaille kosinin differentiaali. Sijoitus muutti "*trigonometrisen murtofunktion*" integroinnin tavallisen murtofunktion integroinniksi.

*Esim. integraaliin $\int \frac{dx}{1+\cos x}$ ei käy edellinen sijoitus sillä $x = \arccos t$ ja siten $dx$:lle tulee hankala lauseke: $dx = -1/\sqrt{1-t^2}\,dt$. On olemassa eräs trigonometrinen erikoissijoitus, joka muuttaa sinin, kosinin, tangentin ja $dx$:n $t$:n murtofunktioiksi. Tämä sijoitus on

$$\mathbf{\tan \tfrac{x}{2} = t}.$$

*Tätä ja kaavoja $\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ ja $\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ käyttäen saadaan $\sin x, \cos x, \tan x$ esitettyä $t$:n murtofunktioina:

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \therefore \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Lisäksi $\frac{x}{2} = \arctan t \therefore x = 2\cdot\arctan t,\ \ dx = 2\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt$ (vrt. kaavasto).

***Esim. 9** $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$ $\Big|$ $sij.\ \tan\frac{x}{2} = t \therefore \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$

$$= \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2\,dt}{2} = \int dt = t + C = \tan\tfrac{x}{2} + C.$$

*Tutki, miten matematiikkaohjelmat (MathCad, Matlab tms.) pystyvät integroimaan edellä olevan tapaisia funktioita ja millaisessa muodossa ne esittävät vastauksen.

## HARJOITUKSIA

### A

**5.1** a) $\int_0^{\pi/2} \sin(3x - \pi/6)\,dx$, b) $\int_0^{T/3} \cos 3\omega t\,dt \quad (T = 2\pi/\omega)$.

**5.2** a) $\int_0^1 \tan^2 4u\,du$, b) $\int_0^{\pi/2} (\sin^2 2t + \cos^2 3t)\,dt$.

**5.3** a) $\int_\pi^{2\pi} \sin x \cos x\,dx$, b) $\int \cos 3x \sin x\,dx$.

**5.4** $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x\,dx$.

***5.5** Laske (sij. $\tan\frac{x}{2} = t$) a) $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$, b) $\int \frac{1}{1-\cos x}\,dx$.

### B

**5.6** a) $\int (t+1)\sin 2t\,dt$, b) $\int_0^\pi \sin^5 \frac{x}{2}\,dx$.

**5.7** a) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx$, b) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2x}{1+\sin x}\,dx$.

**5.8** $\int_0^{T/2} (t+1)\sin(3\omega t + \pi/3)\,dt \quad (T = 2\pi/\omega)$.

***5.9** a) $\int_0^{\pi/3} \frac{dt}{1-\sin t}$, b) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ (sij. $\tan x = t$).

### C

**5.10** a) $\int \frac{dt}{\sin^3 \omega t}$, b) $\int \frac{dx}{\sin 2x \cos^2 x}\,dx$.

**5.11** Lyhyenä aikavälinä dt vaihtovirta tekee työn $dW = u(t)i(t)dt$ (vrt. tasavirran työ $W = Pt = UIt$). Laske integroimalla tästä työ yhden jakson $0 \ldots T$ aikana, jos $u(t) = \hat{u}\sin\omega t$ ja $i(t) = \hat{i}\sin(\omega t - \varphi)$.

# 6 Irrationaalifunktioiden integrointi

Irrationaalifunktioissa muuttuja $x$ esiintyy juuren alla. Tällaisia integraaleja on laskettu aikaisemmin esim. yhdistetyn funktion potenssin yhteydessä ja arkus- ja areafunktioiden yhteydessä.

**Esim. 1**
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx = \tfrac{1}{3}\cdot\int (1+x^3)^{-1/2}\cdot 3x^2\,dx = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{(1+x^3)^{1/2}}{1/2}+C$$
$$= \tfrac{2}{3}\sqrt{1+x^3}+C.$$

Irrationaalifunktioista suuri osa on sellaisia, että niillä ei ole olemassa mitään tavallisen muotoista integraalifunktiota (kuten on voitu todistaa). Niinpä esimerkiksi integraalien $\int \sqrt{1+x^3}\,dx$ ja $\int \sqrt[3]{1-x^2}\,dx$ arvoja ei pystytä tavallisessa mielessä laskemaan. Myöhemmin opitaan esittämään näiden integraalien arvot äärettömän pitkinä *sarjoina*. Seuraavassa esitetään eräitä funktiotyyppejä, joiden integrointi onnistuu sopivan sijoituksen (tai sijoitusmenettelyllä johdetun valmiskaavan) avulla.

*Jos juuren alla oleva lauseke on *lineaarinen*, voidaan koko juurilauseke valita uudeksi muuttujaksi:

***Esim. 2**
$$\int \frac{x}{\sqrt{x-2}+1}\,dx \;\Big|\; sij.\ \sqrt{x-2}=t\ \therefore x-2=t^2\ \therefore dx=2t\,dt$$
$$= \int \frac{t^2+2}{t+1}2t\,dt = 2\int \frac{t^3+2t}{t+1}\,dt = 2\int (t^2-t+3-\frac{3}{t+1})\,dt$$
$$= 2(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+3t-3\ln|t+1|)+C,\ \ missä\ \ t=\sqrt{x-2}.$$

Tässä esimerkissä on ehkä tarpeetonta suorittaa sievennys pidemmälle.

*Jos integroitavassa funktiossa esiintyy muotoa $\sqrt{a^2-x^2}$ oleva juurilauseke, niin sopiva sijoitus on $\boldsymbol{x = a\sin t}$ $(-\pi/2 \le t \le \pi/2, a>0)$. Tällöin nimittäin

$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} = a\sqrt{1-\sin^2 t} = a\cos t,\quad dx = a\cos t\,dt$$

ts. integraalista häviää juurilauseke ja integraali muuttuu trigonometriseksi. Tyyppiesimerkki on seuraava:

***Esim. 3** $\int \sqrt{4 - x^2}\, dx \;\Big|\; sij.\ x = 2\sin t,\ dx = 2\cos t\, dt$

$$= \int \sqrt{4 - 4\sin^2 t}\, 2\cos t\, dt = 4\int \sqrt{1 - \sin^2 t}\, \cos t\, dt$$

$$= 4\int \cos^2 t\, dt$$

$$= 2t + 2\sin t \cos t + C \;\Big|\; \sin t = \tfrac{x}{2},\ \cos t = \sqrt{1 - (\tfrac{x}{2})^2} = \tfrac{\sqrt{4 - x^2}}{2}$$

$$= 2\arcsin \tfrac{x}{2} + \tfrac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + C.$$

*Jos integroitavassa funktiossa esiintyy muotoa $\sqrt{a^2 + x^2}$ *tai* $\sqrt{x^2 - a^2}$ oleva juurilauseke, niin eräät mahdolliset sijoitukset ovat $x = a\tan t$ ja $x = \frac{a}{\sin t}$. Yleensä näiden sijoitusten käyttö vaatii kuitenkin aika hyvää trigonometristen lausekkeitten käsittelytaitoa. Kaavastosta löytyy muitakin sopivia sijoituksia ja seuraavat kuusi valmista "perusintegraalia":

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \tfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{a^2}{2}\arcsin \tfrac{x}{a} + C,$$

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \tfrac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \tfrac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C,$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \tfrac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \tfrac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \tfrac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C.$$

**Esim. 4** $\int \frac{dt}{\sqrt{4 - t^2}} = \arcsin \tfrac{t}{2} + C, \quad \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 4}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2 - 4}\right| + C.$

*Jos integroitavassa funktiossa on esim. muotoa $\sqrt{a^2 + b^2 x^2}$ oleva lauseke, niin sijoituksella $bx = t$ integrointi muuttuu edellisen kohdan mukaiseksi.

*Jos integroitavassa funktiossa on muotoa $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, oleva osa, niin neliöinti ja neliöosan sijoitus t:ksi poistaa juuren alta 1. asteen termin ja integrointi palautuu edellisiin kohtiin kuten seuraava esimerkki osoittaa.

***Esim. 5** $\int \sqrt{3+6x-9x^2}\,dx = \int \sqrt{3-(9x^2-6x+1^2)+1^2}\,dx$

$= \int \sqrt{4-(3x-1)^2}\,dx \quad \Big| \; 3x-1=t \;\; \therefore 3dx=dt$

$= \int \sqrt{4-t^2}\cdot\tfrac{1}{3}\,dt = \tfrac{1}{3}(\tfrac{t}{2}\sqrt{4-t^2}+\tfrac{2^2}{2}\arcsin\tfrac{t}{2})+C$

$= \tfrac{3x-1}{6}\sqrt{3+6x-9x^2}+\tfrac{2}{3}\arcsin\tfrac{3x-1}{2}+C.$

## HARJOITUKSIA

### A, B

**6.1** a) $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx$, b) $\int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx$, c) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x}}dx$.

**6.2** a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$, b) $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$, c) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-1}$.

**6.3** a) $\int_4^9 \frac{dt}{\sqrt{t}+1}$, *b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ .

**6.4** a) $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$, *b) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$.

**6.5** $\int_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$ (sij. $x = 3\sin t$)

**6.6** a) $\int_0^1 \sqrt{2+x^2}\,dx$, b) $\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{2-u^2}}$, c) $\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{2+u^2}}$.

***6.7** a) $\int_{-2}^0 \sqrt{x^2+4x+8}\,dx$, b) $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+2t}}$.

### C

**6.8** a) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$, b) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$.

**6.9** Laske trig. sijoituksella: a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}\,(x>0)$, b) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx$.

**6.10** Laske $\int \sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx$ sijoituksella $\sqrt{\frac{1-x}{x}} = t$.

# 7 Eksponentti-, logaritmi- ja hyperbelifunktiot

Edellä on esitelty kolmen tärkeän funktiotyypin, murto-, trigonometristen- ja irrationaalifunktioiden integrointimenetelmiä. Täydennetään tätä luetteloa vielä lähinnä eksponentti- ja logaritmifunktioilla.

## 7.1 Eksponenttifunktioiden integrointitapoja

**Esim. 1** $1) \int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C.$

$$2) \int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}\cdot(-2x)\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

Jälkimmäisessä kohdassa oli mukana sopiva x:n potenssi sisäfunktion derivaataksi. Seuraavassa esimerkissä on mukana liian korkea x:n potenssi. Se poistuu ***osittaisintegroinnilla***.

**Esim. 2** $\int_0^1 xe^{-2x}\,dx \quad \left| \begin{pmatrix} u = x & v' = e^{-2x} \\ u' = 1 & v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{pmatrix} \right.$

$$= \Big|_0^1 x\cdot(-\tfrac{1}{2}e^{-2x}) + \tfrac{1}{2}\int_0^1 e^{-2x}\,dx = -\tfrac{1}{2}e^{-2} - \tfrac{1}{4}\Big|_0^1 e^{-2x}$$

$$= -\tfrac{1}{2}e^{-2} - \tfrac{1}{4}(e^{-2} - e^0) = \tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{4}e^{-2}.$$

**Esim. 3** On pystytty todistamaan, että integraalien

$$\int e^{-x^2}\,dx \quad \text{(ns. } \textit{virheintegraali}\text{)} \quad \text{ja} \quad \int \frac{e^x}{x}\,dx$$

arvoille ei ole olemassa mitään tavallista esitystapaa (ns. suljetussa muodossa). Näille integraaleille saadaan myöhemmin esitys sarjojen avulla.

Kaavastosta löytyvät osittaisintegroinnilla johdetut kaavat ainakin integraaleille

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx \quad \text{ja} \quad \int e^{ax}\cos bx\,dx$$

sekä kaava

$$\int x^n e^x\,dx = e^x(x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - +\ldots+(-1)^n n!) + C.$$

**Esim. 4** $\int_0^1 x^3 e^{2x}\,dx \;\Big|\; \textbf{sij. } 2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{t} \therefore x = \frac{1}{2}t,\, dx = \frac{1}{2}dt, \quad t\colon 0\ldots 2$

$$= \int_0^2 (\tfrac{1}{2}t)^3 e^t \cdot \tfrac{1}{2}\,dt = \tfrac{1}{16}\int_0^2 t^3 e^t\,dt = \tfrac{1}{16}\Big|_0^2 e^t(t^3 - 3t^2 + 3\cdot 2t - 3\cdot 2\cdot 1)$$

$$= \tfrac{1}{16}[e^2\cdot 2 - e^0(-6)] = \tfrac{1}{8}(e^2+3).$$

(Toisin: 3 osittaisintegrointia.)

## 7.2 Logaritmifunktioiden integrointitapoja

Päämenetelmänä voidaan ehkä pitää ***sijoitusta***.

**Esim. 5** $I = \int \sqrt{x}\ln x\,dx \;\Big|\; sij.\ln x = t \therefore x = e^t,\, dx = e^t dt$

$$= \int \sqrt{e^t}\cdot t\cdot e^t\,dt = \int t\, e^{\frac{3}{2}t}\,dt \;\Bigg|\; \begin{pmatrix} u = t & v' = e^{\frac{3}{2}t} \\ u' = 1 & v = \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}t} \end{pmatrix}$$

$$= \tfrac{2}{3}te^{\frac{3}{2}t} - \tfrac{4}{9}e^{\frac{3}{2}t} + C = \tfrac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \tfrac{4}{9}x\sqrt{x} + C.$$

*Edelliseen esimerkkiin käy myös osittaisintegrointi seuraavasti:

$$I = \int \sqrt{x}\ln x\,dx \;\Bigg|\; \begin{pmatrix} u = \ln x & v' = \sqrt{x} \\ u' = \frac{1}{x} & v = \frac{2}{3}x\sqrt{x} \end{pmatrix} \quad \text{Näin päin!}$$

$$= \tfrac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \tfrac{2}{3}\int \sqrt{x}\,dx = \tfrac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \tfrac{4}{9}x\sqrt{x} + C.$$

## 7.3 Hyperbelifunktiot

Hyperbelifunktioita $\boxed{\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$, $\boxed{\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$ ja $\boxed{\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}}$ sisältäviä lausekkeita voidaan integroida esim. siten, että muutetaan ne eksponenttifunktiolausekkeiksi.

**Esim. 6** $\int \cosh^2 x\,dx = \int \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (e^{2x} + 2\underbrace{e^x e^{-x}}_{=1} + e^{-2x})\,dx$

$$= \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}e^{2x} + 2x - \tfrac{1}{2}e^{-2x}) + C$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} + 2x\right) + C = \tfrac{1}{4}\sinh 2x + \tfrac{x}{2} + C.$$

Hyperbelifunktioita voidaan käsitellä myös samantapaisesti kuin trigonometrisia funktioita. Hyperbelifunktiolla on nimittäin laskulakeja, jotka ovat lähes samanlaisia kuin trigonometristen funktioiden laskulait, ainoastaan + ja – merkeissä on eroja. Esimerkiksi

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ (– eikä +).

(2) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$,

(3) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$ (+ eikä –),

(4) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$,

(5) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ (+ eikä –),

(6) $D \sinh x = \cosh x, \quad D \cosh x = \sinh x,$

(7) $D \tanh x = \dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$ (– eikä +)

*Todistetaan laki (2):

$$\begin{aligned} op. &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \tfrac{1}{4}\left[e^x e^y + e^x e^{-y} - e^{-x} e^y - e^{-x} e^{-y} + e^x e^y - e^x e^{-y} + e^{-x} e^y - e^{-x} e^{-y}\right] \\ &= \tfrac{1}{4}\left[2e^x e^y - 2e^{-x} e^{-y}\right] = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \sinh(x+y). \end{aligned}$$

*Lait (1) ja (3) todistettaisiin vastaavasti. Lait (4) ja (5) seuraavat laeista (2) ja (3), kun $x = y$. Derivoimissäännöt (6) ja (7) todistetaan seuraavasti:

$D \sinh x = D \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{e^x - e^{-x} \cdot (-1)}{2} = \cosh x.$ Toinen vastaavasti.

$$D \tanh x = D \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\overbrace{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}^{=1 \text{ l}ain\ (1)\ mukaan}}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

**Esim. 7** Lasketaan $\int \cosh^2 x\, dx$ uudelleen (vrt. Esim. 6), mutta nyt lakien (5) ja (1) nojalla.

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh^2 x + (\cosh^2 x - 1) = 2\cosh^2 x - 1$$

$$\therefore \cosh^2 x = \tfrac{1}{2}(\cosh 2x + 1).$$ Täten

$$\int \cosh^2 x\, dx = \tfrac{1}{2}\int (\cosh 2x + 1)\, dx = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\sinh 2x}{2} + x\right) + C = \tfrac{1}{4}\sinh 2x + \tfrac{x}{2} + C.$$

## HARJOITUKSIA

### A

**7.1** a) $\int_0^1 e^{-3x}\, dx$, b) $\int te^{\varphi t} dt$, c) $\int \sqrt{2e^x}\, dx$.

**7.2** Laske kaavaston kaavojen avulla

a) $\int e^{-t} \sin \omega t\, dt$, b) $\int x^4 e^x\, dx$.

**7.3** Laske $\int x^3 \ln x\, dx$ a) sopivalla sijoituksella, b) suoraan osittaisintegroimalla.

**7.4** a) $\int x \sinh x\, dx$, b) $\int_0^1 x \cosh x\, dx$ c) $\int \sinh^2 x\, dx$.

**7.5** a) $D \ln \cosh(ax + b)$, b) $D \dfrac{1}{\sinh x \cosh x}$.

## B

**7.6** Todista, että $\begin{cases}\cosh x + \sinh x = e^{x} \\ \cosh x - \sinh x = e^{-x}.\end{cases}$

**7.7** Todista, että $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

**7.8** a) $\int x^4 e^{-x}\, dx$, b) $\int \frac{x^2}{e^x}\, dx$.

**7.9** Käyrän $y = \ln x$ ja x-akselin välinen alue välillä 1...e pyörähtää a) x-akselin, b) y-akselin ympäri. Laske pyöräyskappaleen tilavuus.

**7.10** Laske $\int \frac{e^x}{1+e^{-x}}\, dx$ (sij. $e^x = t$).

**7.11** *a*) $\int x^2 \ln x\, dx$, *b*) $\int \frac{du}{u \ln u}$.

## C

**7.12** Trigonometriset- eli ympyräfunktiot (*Circular functions*) liittyvät ympyrään myös siten, että

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$$

on ympyrän parametriesitys. Osoita, että $\begin{cases} x = \pm a\cosh t \\ y = b\sinh t \end{cases}$ on hyperbelin eräs parametriesitys (joten hyperbelifunktiot ovat tekemisissä hyperbelin kanssa).

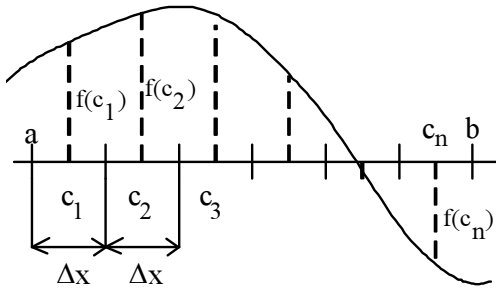
**7.13** Arkusfunktioiden integrointiin käyvät samantapaiset menetelmät kuin logaritmin integrointiin. Laske $\int x \arcsin x\, dx$ a) sijoituksella, b) osittaisintegroinnilla.

**7.14** Laske $\int \frac{e^{2t}}{e^t - e^{-t}}\, dt$.

# 8 Lisää integraalien sovelluksia

## 8.1 Funktion keskiarvo välillä [*a*,*b*]

Jaetaan väli [*a*,*b*] *n*:ään yhtä suureen osaan. Merkitään yhden osavälin pituutta $\Delta x$:llä ja *i*:nnen osavälin keskipistettä $c_i$:llä. Funktion arvojen $f(c_1), \ldots, f(c_n)$ aritmeetinen keskiarvo on




$$\frac{f(c_1)+\ldots+f(c_n)}{n} \quad \Big| \text{ lavennetaan } \Delta x\text{:}llä$$

$$= \frac{f(c_1)\cdot\Delta x+\ldots.+f(c_n)\cdot\Delta x}{n\cdot\Delta x} \quad \Big| \quad n\cdot\Delta x = b-a$$

$$= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x \to \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx, \text{ kun } \Delta x \to 0.$$

Saatu integraalilauseke esittää kaikkien väliin [*a*,*b*] kuuluvien funktionarvojen *f*(*x*) (joita on äärettömän monta) keskiarvoa. Sitä sanotaan funktion *f* **keskiarvoksi** välillä [*a*,*b*] ja merkitään esim. $f_k$:lla. Siis

$$\boxed{\boldsymbol{f_k = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}}.$$

**Esim. 1** Funktion $y = \sin x$ keskiarvo välillä [0,π] on

$$f_k = \frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \frac{1}{\pi}\Big|_0^{\pi}(-\cos x) = \frac{2}{\pi}.$$

***Esim. 2** Funktion *f neliöllinen keskiarvo* tarkoittaa funktion $f^2$ keskiarvon neliöjuurta. Laske jännitteen $u = \hat{u}\sin\omega t$ *tehollisarvo* $u_{eff}$ (*effective value*) eli neliöllinen keskiarvo jaksovälillä [0,*T*].

$$u_{eff}{}^2 = \frac{1}{T-0}\int_0^T \hat{u}^2\cdot\sin^2\omega t\,dt \quad \Big| \quad \begin{array}{l}\text{sij. } \omega t = z \therefore dt = \frac{1}{\omega}dz,\\ z\text{: } 0\ldots\omega T\end{array}$$

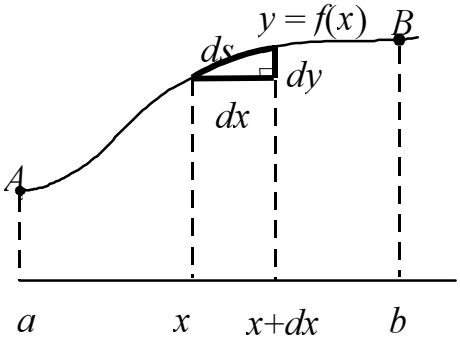
$$= \frac{\hat{u}^2}{\omega T}\int_0^{\omega T} \sin^2 z\,dz \quad \Big| \quad \omega T = 2\pi$$

$$= \frac{\hat{u}^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 z\,dz \quad \Big| \quad \sin^2 z = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2z)$$

$$= \frac{\hat{u}^2}{4\pi}\Big|_0^{2\pi}(z - \frac{\sin 2z}{2}) = \frac{\hat{u}^2}{4\pi}(2\pi - 0) = \frac{\hat{u}^2}{2}. \quad \therefore \; \boldsymbol{u_{\text{eff}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}}.$$

## 8.2 Kaaren pituus

Lasketaan käyrän $y = f(x)$ kaaren pituus välillä [*a*, *b*] eli pisteestä A pisteeseen B.




Kaarialkio kohdassa *x* on

$$\boldsymbol{ds} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \quad \Big| \quad dy = f'(x)\cdot dx$$
$$= \sqrt{[1 + f'(x)^2]\cdot(dx)^2} = \sqrt{\boldsymbol{1 + f'(x)^2}}\cdot\boldsymbol{dx}.$$

Kun *x* muuttuu *a*:sta *b*:hen, koko kaari saadaan kaarialkioiden "summana":

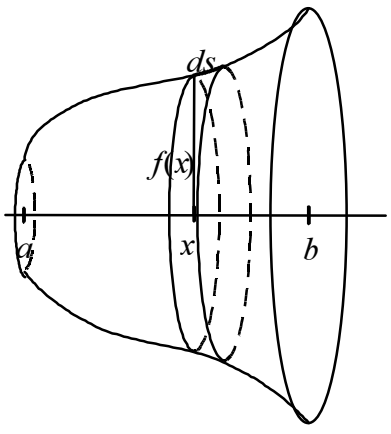
$$\boxed{\boldsymbol{s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\; dx}}.$$

**Esim. 3** Paraabelinkaaren $y = x^2, 0 \le x \le 1$ pituus:

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\; dx \quad \Big| \quad \begin{array}{l} \text{sij. } 2x = t \;\therefore\; dx = \frac{1}{2}dt \\ t\text{: } 0 \ldots 2 \end{array}$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1 + t^2}\; dt = \tfrac{1}{2}\Big|_0^2 [\tfrac{t}{2}\sqrt{1 + t^2} + \tfrac{1}{2}\ln(t + \sqrt{1 + t^2})]$$
$$= \tfrac{1}{4}[2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})] \approx 1{,}48.$$

## *8.3 Pyöräyspinnan ala

*Käyrä $y = f(x)$ pyörähtää *x*-akselin ympäri välillä [*a*, *b*].




*Kun kaarialkio *ds* kohdassa *x* pyörähtää, syntyy *vyö*, jonka pituus on $2\pi \cdot f(x)$ ja leveys on *ds*. Täten vyön pinta-ala on

$$dA = 2\pi f(x)\cdot ds = 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\; dx$$

.

Koko pinta-ala on vöiden pinta-alojen "summa":

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx .$$

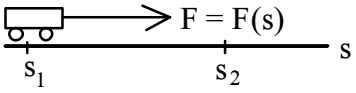
**Esim. 4** Paraabelinkaari $y = x^2, 0 \le x \le 1$ pyörähtää $x$-akselin ympäri. Muodostuneen pinnan pinta-ala on

$$A = 2\pi \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx \approx 3{,}8097 .$$

Karkean likiarvon saat esim. käyttämällä integraalin määritelmään perustuvaa keinoa ja 4 osaväliä. *Tarkka arvo olisi $\frac{\pi}{32}[18\sqrt{5} - \ln(2 + \sqrt{5})]$.

## 8.4 Työintegraali

Jos matka-akselin $s$ suuntainen voima $F(s)$ kuljettaa kappaletta kohdasta $s_1$ kohtaan $s_2$, se tekee työn



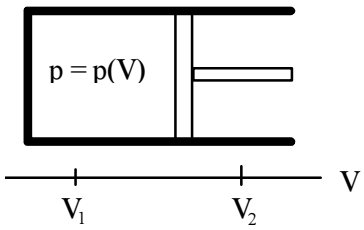

$$\boxed{W = \int_{s_1}^{s_2} F(s)\, ds},$$

sillä kohdassa $s$ $ds$:n pituisella matkalla työ on $dW = F(s) \cdot ds$ ja koko työ on osatöiden "summa" (vrt. I osa, s. 47).

**Esim. 5** Kahden massapisteen välinen vetovoima on $F = c\frac{m_1 m_2}{r^2}$. Kun etäisyys muutetaan arvosta $r_1$ arvoon $r_2$, tehdään työ

$$W = cm_1m_2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2}\, dr = cm_1m_2 \Big|_{r_1}^{r_2} (-\frac{1}{r}) = cm_1m_2(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}).$$

***Kaasun laajenemistyöhön*** voidaan soveltaa samaa ajattelutapaa. Silloin matkan $s$ tilalla on tilavuus $V$ ja voiman $F$ tilalla on paine $p$, joka muuttuu $V$:n funktiona: $p = p(V)$. Kun kaasu laajenee pienen määrän $dV$, se tekee työn




$$dW = p(V) \cdot dV .$$

Koko työ on osatöiden "summa":

$$\boxed{W = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\,dV}.$$

**Esim. 6** Ihannekaasulla on $pV = nRT$, missä $n$ ja $R$ ovat vakioita (moolimäärä ja kaasuvakio). Jos myös kaasun lämpötila $T$ pidetään vakiona eli kyseessä on ***isoterminen*** muutos, niin yhtälö on muotoa $pV =$ vakio. Koska koko ajan paineen ja tilavuuden tulolla on sama arvo, tämän arvon pitää olla = alkupaineen $p_1$ ja alkutilavuuden $V_1$ tulon, ts.

$$pV = p_1V_1 \quad \therefore p = p_1V_1\frac{1}{V}.$$

Isotermisessä muutoksessa siis paine on kääntäen verrannollinen tilavuuteen. Työ

$$W = p_1V_1\int_{V_1}^{V_2}\frac{1}{V}\,dV = p_1V_1\Big|_{V_1}^{V_2}\ln V = \boldsymbol{p_1V_1\ln\frac{V_2}{V_1}}.$$

## 8.5 Epäolennainen integraali

Joissakin sovelluksissa joudutaan laskemaan integraaleja, joissa integroimisvälin $[a,b]$ tilalla on äärettömyyteen ulottuva väli, esim. $[a,\infty)$.

**Esim. 7** Esimerkissä 5 laskettiin työ, kun massapisteiden välimatka muutettiin arvosta $r_1$ arvoon $r_2$. Jos välimatka muuttuu jostakin arvosta $R$ äärettömyyteen (hyvin kauas), niin työ on

$$W = cm_1m_2\int_R^\infty\frac{1}{r^2}\,dr = -cm_1m_2\Big|_R^\infty\frac{1}{r} = -cm_1m_2(0-\frac{1}{R}) = \frac{cm_1m_2}{R}.$$

Kyseessä on eräs ns. ***epäolennainen integraali*** (improper integral), jonka laskeminen kävi lähes tavalliseen tapaan. Ylärajaa $\infty$ ei voida varsinaisesti "sijoittaa" integraalifunktioon $\frac{1}{r}$ muuttujan $r$ tilalle, vaan oikea ajattelutapa on, että $\frac{1}{r}$:n *raja-arvo* on 0, kun $r \to \infty$.

Jos epäolennaisen integraalin arvo on äärellinen, sanotaan, että integraali ***suppenee*** (*konvergoi*). Muussa tapauksessa taas integraali ***hajaantuu*** (*divergoi*).

## HARJOITUKSIA

### A

**8.1** Laske funktion $y = x^2$ keskiarvo välillä [0,2].

**8.2** Käyrällä $y^2 = x^3$ eli $y = \pm x^{3/2}$ on origossa kärki. Piirrä kuva ja laske käyrän ylemmän puolikkaan pituus välillä [0,5].

**8.3** Laske Esimerkin 4 mukaisen alueen pinta-alan likiarvo, käyttämällä integraalin määritelmään perustuvaa keinoa ja 4 osaväliä.

**8.4** $x$-akselin suuntainen, eksponentiaalisesti vähenevä voima $F = 3e^{-2x}$ kuljettaa kappaletta $x$-akselia pitkin origosta äärettömyyteen. Laske työ.

**8.5** Osoita, että a) integraali $\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ suppenee ja sen arvo on 1/2, mutta b) integraali $\int_2^\infty \frac{1}{x}\,dx$ hajaantuu. Koska integroitavat funktiot ovat > 0 integroimisvälillä, integraalit esittävät eräitä pinta-aloja. Piirrä havainnollistavat kuvat samaan koordinaatistoon.

### B

**8.6** Kappale liikkuu suoraviivaisesti nopeudella $v = v(t)$. Laske nopeuden keskiarvo aikavälillä $[t_1, t_2]$.

**8.7** Laske ketjuviivan $y = \cosh x$ pituus välillä $[-1, 1]$.

**8.8** Käyrä $y = f(x)$ pyörähtää y-akselin ympäri välillä $[a,b]$, missä $a \geq 0$.
a) Johda muodostuneen pyöräyspinnan alalle laskukaava.
b) Sovella tulosta perusparaabeliin välillä [0,1].

**8.9** Johda $r$-säteisen pallon pinta-alan kaava $A = 4\pi r^2$.

**8.10** Adiabaattisessa muutoksessa kaasun paineen ja tilavuuden välillä on yhteys

(1) $$pV^\kappa = vakio,$$

missä eksponentti κ (*kappa*) on jonkin verran 1:tä suurempi luku ($\kappa = c_p / c_V, 1 < \kappa \leq 5/3$). Laske tilavuudenmuutostyö, jos κ = 1,5 ja laissa (1) vakiolla on arvo 3. Piirrä vastaavan funktion $p = 3/V^{1,5}$ kuvaaja.

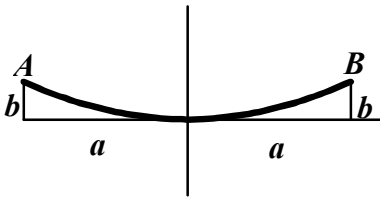
**8.11** Laske käyrän $y = xe^{-2x}$ ja $x$-akselin välisen äärettömyyteen ulottuvan alueen ala (piirrä kuva).

# C

**8.12** Keskiarvo $f_k$ täyttää ehdon $f_k \cdot (b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$. Jos f(x) >0 välillä [*a*,*b*], niin tämän yhtälön kumpikin puoli esittää tiettyä pinta-alaa. Mikä geometrinen merkitys $f_k$ :lla siis tässä tapauksessa on?

**8.13** Laske virranvoimakkuuden $i = \hat{i}\sin(\omega t + \varphi)$ neliöllinen keskiarvo välillä [0,*T*].

**8.14** Jos köysi (vaijeri, kaapeli tms.) on ripustettu loivasti, ts. kuvassa *b* on *paljon pienempi* kuin *a* (merk. ***b* << *a***), niin köysi asettuu likimain paraabelin muotoon.




a) Johda köyden pituudelle likiarvokaava

$$s \approx \frac{6a^2 + 4b^2}{3a},$$

käyttäen tietoa, että yleisesti

$$\sqrt{1+z} \approx 1 + \tfrac{1}{2}z \text{ , jos z} << 1$$

(sillä $op^2 - vp^2 = z^2/4 \approx 0$). b) Laske *s*:n likiarvokaavasta *b*, kun 2*a* = 30,0 *m* ja *s* = 31,0 *m*.

**8.15** Funktion *f*(*t*) ***Laplace-muunnos*** *F*(*s*) saadaan, kun tämä funktio kerrotaan "vaimennustekijällä" $e^{-st}$ ($s > 0$) ja integroidaan 0:sta äärettömään, siis

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt\,.$$

Laske seuraavien funktioiden *Laplace*-muunnokset:

a) $f(t) = a$ ($a$ = vakio), b) $f(t) = t$, c) $f(t) = e^{at}$ ($s > a$).

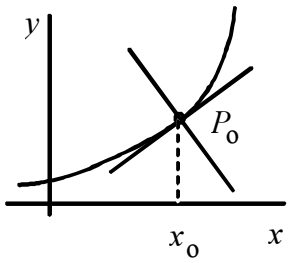
# 9 Käyriä koskevia tuloksia

## 9.1 Kertaus

Edellä on esitetty mm. seuraavat käyrää $y = f(x)$ koskevat tulokset:

1) Pisteeseen $P_o(x_o, y_o)$ piirretyn ***tangentin*** ja ***normaalin*** yhtälöt ovat

$$y - y_o = f'(x_o)(x - x_o), \quad y - y_o = -\frac{1}{f'(x_o)}(x - x_o).$$




2) Jos $y''(x_o) > 0$, niin käyrä on negatiivisen y-akselin suuntaan kupera pisteessä $P_o(x_o, y_o)$.

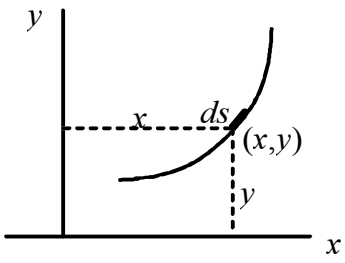
3) Kaarialkio ja ***kaaren pituus*** ovat

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx, \qquad s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

## *9.2 Kaaren painopiste

*Pisteessä $(x, y)$ olevan kaarialkion $ds$ staattiset momentit ovat

$$dS_y = x \cdot ds, \quad dS_x = y \cdot ds$$




ja koko kaaren momentit ovat osien momenttien "summia", ts.

$$S_y = \int_a^b x\, ds = \int_a^b x\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx, \quad S_x = \int_a^b y\, ds = \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

*Näitä käytetään kaaren $y = f(x), \quad a \le x \le b$ painopisteen $(x_p, y_p)$ laskemiseen seuraavasti. Jos kaaren pituus $s$ ja ***painopiste*** $(x_p, y_p)$ tunnettaisiin, niin kaaren momentit olisivat

$$S_y = x_p \cdot s, \quad S_x = y_p \cdot s \qquad \therefore \boldsymbol{x_p = \frac{S_y}{s}, \; y_p = \frac{S_x}{s}}.$$

***Esim.1** Laske paraabelinkaaren $y = x^2, \quad 0 \le x \le 1$ painopiste.

Tässä esimerkissä $f(x) = x^2, \quad f'(x) = 2x$, joten

$s = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\ dx = 1{,}478...$ (laskettu aikaisemmin),

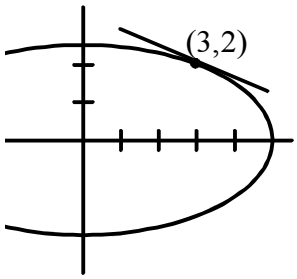
$S_y = \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\ dx = \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1) = 0{,}8483...,$

$S_x = \int_0^1 x^2\sqrt{1+4x^2}\ dx = 0{,}6063...$ (esim. MathCad-ohjelmalla)

$$\therefore x_p = \frac{S_y}{s} \approx 0{,}574, \quad y_p = \frac{S_x}{s} \approx 0{,}410.$$

## 9.3 Ratkaisemattoman funktion derivointi

***Esim. 2** Piste (3,2) toteuttaa ellipsin $x^2 + 4y^2 = 25$ yhtälön. Tähän pisteeseen piirretyn tangentin kulmakerroin voidaan laskea derivointia käyttäen kahdella eri tavalla:




1) Ratkaistaan yhtälöstä $y$ $x$:n funktiona:

$$y = (\pm)\tfrac{1}{2}\sqrt{25-x^2}$$

(+ antaa ellipsin ylemmän puolikkaan) ja lasketaan sitten $y'(3)$.

2) *Derivointi **ratkaisemattomassa eli implisiittimuodossa**:*

Derivoidaan yhtälön $x^2 + 4y^2 = 25$ kumpikin puoli erikseen. Termin $x^2$ derivointi käy tavalliseen tapaan, mutta termiä $4y^2$ derivoitaessa täytyy huomata, että $y$ on $x$:n funktio $y = y(x)$, joten $y^2$:n derivoinnissa on käytettävä yhdistetyn funktion derivoimissääntöä $D\,y(x)^2 = 2 \cdot y(x)^1 \cdot y'(x)$. Siis

$$x^2 + 4y^2 = 25 \quad \Big| \quad \text{derivoidaan termi termiltä muistaen, että } y = y(x)$$

$$2x + 8y \cdot y' = 0$$

$$\therefore y' = -\frac{x}{4y} \quad \therefore \text{ tangentin kulmakerroin } k = -\frac{3}{8}.$$

Derivaatan lausekkeeseen jäi myös $y$:tä, mutta tästä ei ole haittaa, koska tangentin sivuamispisteen kumpikin koordinaatti tunnetaan. *Lasketaan vielä toinen derivaatta $y''$ kyseisessä pisteessä (3,2):

$$2x + 8y \cdot y' = 0 \quad \Big| \quad \text{derivoidaan } \textit{implisiittisesti} \text{ (tulon derivointi)}$$

$$2 + 8y' \cdot y' + 8y \cdot y'' = 0$$

$$2 + 8 \cdot (-\frac{3}{8})^2 + 8 \cdot 2 \cdot y'' = 0 \quad \therefore y'' = -\frac{25}{128}.$$

## 9.4 Parametrimuotoisen funktion derivointi

Useat tekniikassa esiintyvät käyrät esitetään parametrimuodossa:

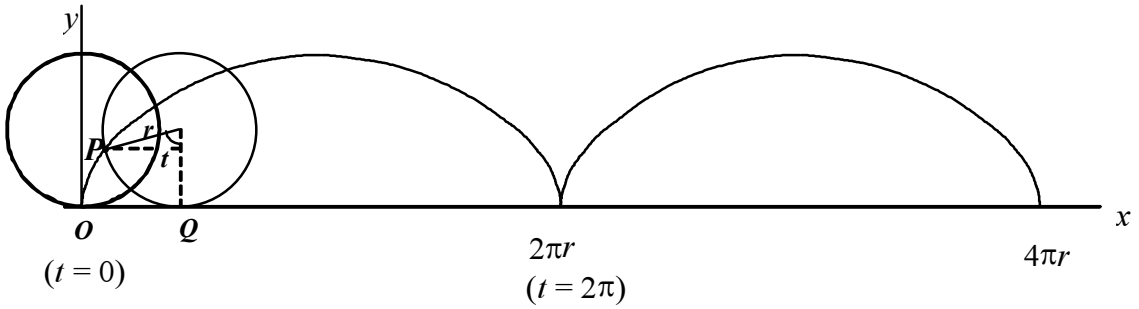
$$\begin{cases} \boldsymbol{x = x(t)} \\ \boldsymbol{y = y(t)} \end{cases}.$$

Kullakin (kyseeseen tulevalla) parametrin $t$ arvolla parametriesitys antaa käyrän yhden pisteen.

**Esim. 3** **Sykloidi** syntyy, kun $r$-säteinen ympyrä vierii suoraa viivaa pitkin ja tarkastellaan vierivän ympyrän yhden pisteen liikettä (vrt. polkupyörän venttiilitapin liike). Jos vierintä tapahtuu pitkin $x$-akselia, sykloidin yhtälöt ovat (kuten alla todistetaan)

(1)
$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases},$$

missä $t$ on seuraavan kuvan mukainen keskuskulma. Parametrin $t$ arvoja 0:sta $2\pi$:hin vastaa se sykloidin kaari, joka alkaa origosta.




*Todistetaan yhtälöt (1). Kuvan mukaan sykloidin yleisen pisteen P koordinaatit ovat

$$y = r - r\cos t = r(1 - \cos t) \quad \text{ja} \quad x = OQ - r\sin t\,.$$

Mutta OQ = kaari PQ (vierinnän takia) ja radiaanin määritelmän mukaan kaari $PQ = r \cdot t$. Siis $x = r \cdot t - r\sin t = r(t - \sin t)$.

Sykloidin parametriyhtälöt (1) määrittelevät $y$:n $x$:n funktiona, sillä kutakin $x$:n arvoa vastaa yksikäsitteinen y:n arvo (vrt. kuva). Tämän funktion esitys tavallisessa ratkaistussa eli *eksplisiittimuodossa* $y = f(x)$ on mutkikas

arkusfunktiolauseke. Derivaatta $f'(x)$ saadaan kuitenkin helposti parametriesityksen avulla, sillä derivaatta = differentiaalien *dy* ja *dx* osamäärä:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{r\sin t\, dt}{r(1-\cos t)\, dt} = \frac{\sin t}{1-\cos t}.$$

Vastaavasti yleisesti paramertimuotoisen funktion $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ derivaatta on

(2) $$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}}.$$

*Toisen derivaatan lauseke on mutkikkaampi:

$$\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^3}}$$

missä esim. $x'$ tarkoittaa samaa kuin $x'(t)$.

*Tod. Sääntö (2) antaa derivaattafunktion itse asiassa parametrimuodossa:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} \overset{(2)}{=} \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)}{x'(t)} = \frac{\frac{y''(t)\cdot x'(t) - y'(t)\cdot x''(t)}{x'(t)^2}}{x'(t)}.$$

**Esim. 4** Laske *t*:n arvoa $\pi/2$ vastaava sykloidin piste sekä 1. ja 2. kertaluvun derivaatat tässä pisteessä, kun vierivän ympyrän säde on 2.

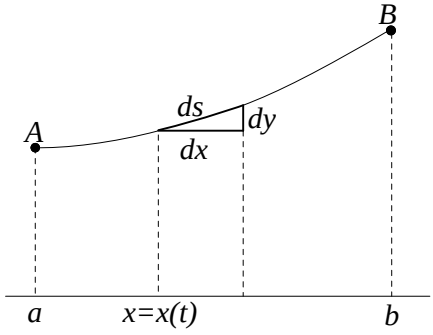
$$x = 2(t - \sin t) \overset{t=\pi/2}{=} 2(\pi/2 - 1) = \pi - 2$$
$$y = 2(1 - \cos t) = 2(1 - 0) = 2$$

$$\begin{cases} x' = 2(1-\cos t) = 2 \\ y' = 2\sin t = 2 \end{cases}, \begin{cases} x'' = 2\sin t = 2 \\ y'' = 2\cos t = 0 \end{cases}.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = 1, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\cdot 0 - 2\cdot 2}{2^3} = -\frac{1}{2}.$$

## 9.5 Parametrikäyrän kaaren pituus ja vastaavan alueen ala

*Oletetaan, että kun $t$ kasvaa arvosta $t_1$ arvoon $t_2$, niin $x$ kasvaa arvosta $a$ arvoon $b$ (kuva). Tällöin saadaan kertaalleen käyrä A:sta B:hen. Lasketaan kaari- ja pinta-alkiot kohdassa $x$, joka saadaan parametrin arvolla $t$:




$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}, \quad dA = y \cdot dx, \; jos \; y > 0.$$

Koska $\begin{cases} dx = x'(t)\,dt \\ dy = y'(t)\,dt \end{cases}$ ja $y = y(t)$, niin

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\; dt \quad \text{ja} \quad dA = y(t) \cdot x'(t)\, dt\,.$$

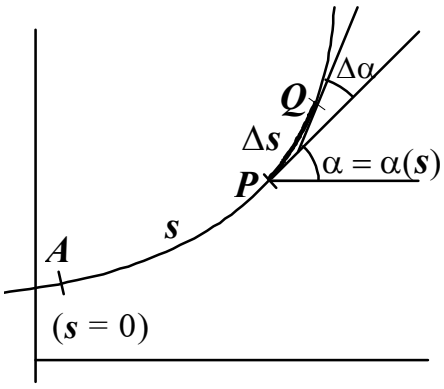
Tästä saadaan kaaren AB pituudelle sekä käyrän ja $x$-akselin välisen alueen alalle kaavat

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\; dt, \qquad A = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)\, dt.$$

*Pinta-alaa laskettaessa on huolehdittava siitä, että $dA$:n lauseke on positiivinen. Alkuoletus, että $x(t)$ kasvaa $t$:n mukana, merkitsee samaa kuin se, että $x'(t) > 0$ integroimisvälillä. Jos $x'(t) < 0$, niin $t$:n kasvaessa $x$:n arvot pienenevät eli käyrä "piirtyy" B:stä A:han. Jos $x'(t)$ vaihtaa merkkiä välillä $[t_1, t_2]$, niin käyrä piirtyy (osittain tai kokonaan) moneen kertaan ja integraali ei anna oikeaa pinta-alaa.

## 9.6 Käyrän kaarevuus

Siirrytään käyrällä jostakin pisteestä A lähtien matka $s$ eteenpäin pisteeseen P. Tangentin suuntakulma $\alpha$ muuttuu matkan $s$ mukana, ts. $\alpha$ on matkan $s$ funktio: $\alpha = \alpha(s)$. Lisäys $\Delta s$ aiheuttaa suuntakulman muutoksen $\Delta\alpha$.



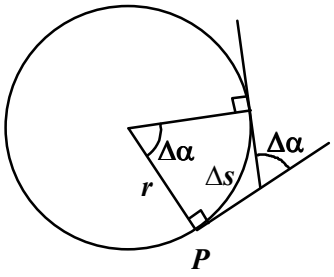

Suhde $\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ kuvaa kaartumisen nopeutta $\Delta s$:n pituisella välillä PQ. Sitä sanotaan *keskikaarevuudeksi* tällä välillä.

Keskikaarevuuden raja-arvo

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$$

on nimeltään käyrän ***kaarevuus pisteessä P***. Se kuvaa käyrän kaartumisnopeutta pisteessä P. Suuri kaarevuus merkitsee, että käyrä kaartuu jyrkästi (P:n lähistöllä).

**Esim. 5** Laske *r*-säteisen ympyrän kaarevuus.




$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s / r}{\Delta s} = \frac{1}{r}.$$

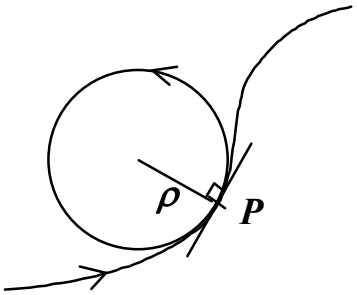
Siis *r-säteisen ympyrän kaarevuus = 1/r.*

Jos käyrällä on kaarevuus *k* jossakin pisteessä P, niin edellisen tuloksen mukaan 1/*k*-säteisellä ympyrällä on sama kaarevuus $\frac{1}{1/k} = k$. Tällaisen ympyrän sädettä eli lukua

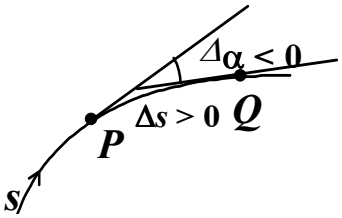
$$\boxed{\rho = \frac{1}{k}} \qquad (\rho = \text{"roo"})$$

sanotaan käyrän ***kaarevuussäteeksi*** pisteessä P.

Jos ρ-säteinen ympyrä asetetaan sellaiseen kohtaan, että sillä on yhteinen tangentti käyrän kanssa pisteessä P (vrt. kuva), niin P:ssä ympyrä ja käyrä sivuavat toisiaan ja ympyrä kaartuu yhtä nopeasti kuin käyrä. Tällainen ***kaarevuusympyrä*** liittyy siis hyvin käyrään pisteessä P.




*Käyrän kaarevuus *k* ja kaarevuussäde ρ voivat itse asiassa olla myös negatiivisia. Näin käy, jos *s*:n kasvattaminen pienentää tangentin suuntakulmaa α, koska tällöin $\Delta\alpha / \Delta s$ on negatiivinen (viereinen kuva).




**Lause** *Käyrän y = f(x) kaarevuussäde pisteessä P(x,y) on*

$$\boxed{\rho = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{y''}}.$$

**Tod.*

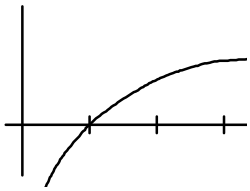
$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{ds}{d\alpha} \quad \left| \quad \begin{array}{l} ds = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = [1+(y')^2]^{1/2}\,dx \\ \tan\alpha = y' \quad \therefore \alpha = \arctan y' \quad \therefore d\alpha = \dfrac{1}{1+(y')^2}\cdot y''\,dx \end{array} \right.$$

$$= \frac{[1+(y')^2]^{1/2}\,dx}{y''/[1+(y')^2]\,dx} \quad = \quad \frac{[1+(y')^2]^{3/2}}{y''}.$$

**Esim. 6** Laske käyrän $y = \ln x$ kaarevuussäde pisteessä (1,0).

$$y' = \frac{1}{x},\ y'' = -\frac{1}{x^2} \quad \therefore y'(1) = 1, \quad y''(1) = -1$$

$$\therefore \rho = \frac{[1+1^2]^{3/2}}{-1} = -2^{3/2} = -\mathbf{2\sqrt{2}}.$$

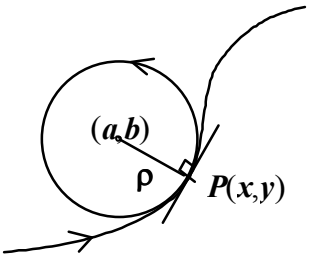


Jos $y' \approx 0$, niin edellisen lauseen mukaan $\rho \approx \dfrac{1}{y''}$. Tätä tietoa käytetään esimerkiksi palkin taipumaviivan diff.yhtälön johtamisessa (lujuusopissa tai rakenteiden mekaniikassa).

*Parametrimuotoiselle käyrälle vastaava kaarevuussäteen lauseke on

$$\rho = \frac{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}}{x'y'' - y'x''}.$$

*Mm. jyrsinnässä voidaan tarvita kaarevuussäteen ρ lisäksi kaarevuusympyrän keskipisteen eli ns. ***kaarevuuskeskipisteen*** lausekkeita.



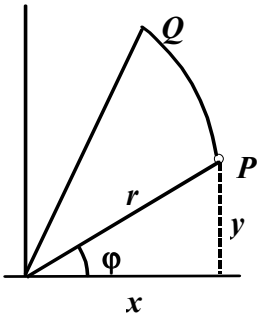

*Kaarevuuskeskipisteelle ($a$, $b$) voidaan johtaa seuraavat lausekkeet, joista edellinen pari koskee käyrää $y = f(x)$ ja jälkimmäinen parametrimuotoista käyrää (vrt. kaavasto):

$$\begin{cases} a = x - y' \cdot \dfrac{1+(y')^2}{y''} \\ b = y + \dfrac{1+(y')^2}{y''} \end{cases} \begin{pmatrix} \text{käyränä} \\ y = f(x) \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} a = x - y' \cdot \dfrac{(x')^2+(y')^2}{x'y'' - y'x''} \\ b = y - x' \cdot \dfrac{(x')^2+(y')^2}{x'y'' - y'x''} \end{cases} \begin{pmatrix} \text{käyränä} \\ \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \end{pmatrix}.$$

*Kun piste P liikkuu käyrää pitkin, sen kaarevuuskeskipiste piirtää toisen käyrän, kaarevuuskeskipisteiden uran, jota sanotaan alkuperäisen käyrän ***evoluutaksi***. Kääntäen alkuperäistä käyrää sanotaan kaarevuuskeskipisteiden urakäyrän ***evolventiksi*** (esim. evolventtihammaspyörät).

## 9.7 Käyrä napakoordinaatistossa

Monissa sovelluksissa (robotiikka, CAD,...) on luonnollista käyttää suorakulmaisen koordinaatiston sijaan joskus napakoordinaatteja, ts. esittää pisteen paikka tai paikan muutos (P:stä Q:hun) etäisyyden $r$ (> 0) ja vaihekulman φ avulla.




Jos napa-akselina on positiivinen $x$-akseli, pisteen P suorakulmaisten ja napakoordinaattien välillä on yhteys (vrt. kuva)

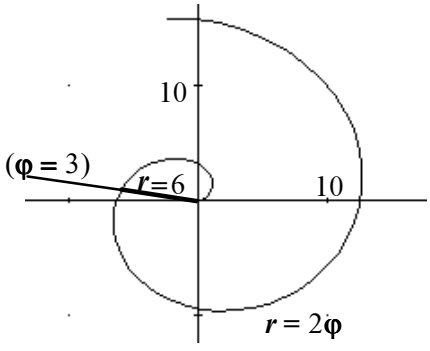
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad \text{ja kääntäen} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \quad \Rightarrow \varphi = \ldots \end{cases} \quad \text{(oikea neljännes!)}$$

Tavallista käyrän esitystä $y = f(x)$ vastaa napakoordinaatistossa esitys

$$r = r(\varphi)\,.$$

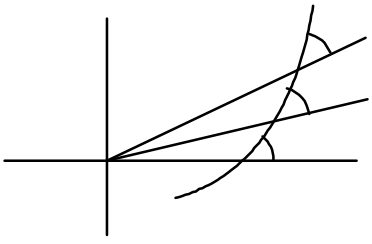
Antamalla tässä φ:lle arvoja sopivin välein, saadaan käyrä piirrettyä.

**Esim. 7** Spiraalin $r = 2\varphi$ kuvaaja on viereisen kuvan mukainen. Jos φ:llä on esim. arvo 3 (rad), niin $r$ saa arvon 6.

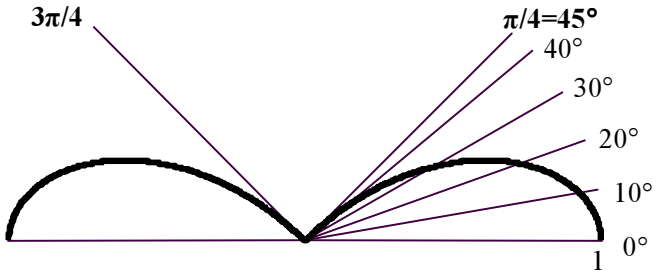



*Yleisemmin ns. *Arkhimedeen spiraalin* $\boldsymbol{r = k\varphi}$ (missä $k$ = vakio) sovellukset perustuvat siihen, että $r$ kasvaa suoraan verrannollisena kulmaan φ.

**Logaritminen spiraali* $\boldsymbol{r = ae^{k\varphi}}$ taas esiintyy leikkurien terissä, muotojyrsimissä yms. siksi, että tällä spiraalilla käyrän ja säteen välinen kulma on käyrän jokaisessa pisteessä samankokoinen, kuten voidaan todistaa.



**Esim. 8** Käyrän $r = \cos 2\varphi$ kuvaaja on viereisen kuvan mukainen. Kun φ kasvaa 0:sta π/4:ään, niin *r*:n arvot pienenevät 1:stä 0:aan. Sen jälkeen etäisyys *r* on negatiivinen aina φ:n arvoon 3π/4 saakka, jolloin *r* tulee taas positiiviseksi ja saadaan käyrän pisteitä.

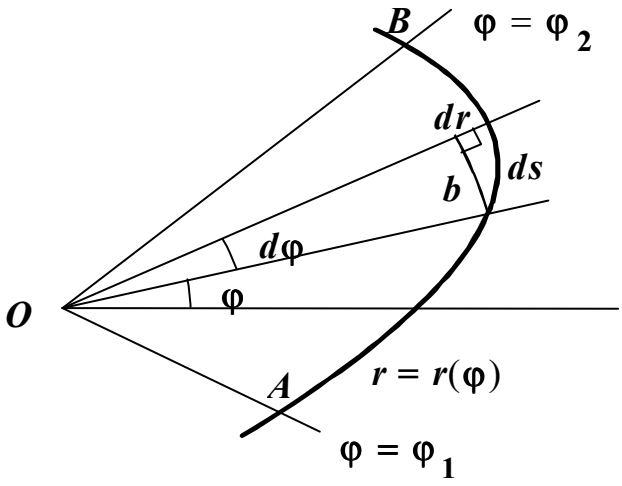



*Voidaan myös sopia, että jos *r* on negatiivinen, niin vastaava piste on kyseisen etäisyyden päässä origosta, mutta sen vastakkaisella puolella. Näin ajatellen edellisestä käyrästä tulee "nelilehtinen".

## *9.8 Kaaren pituus ja pinta-ala napakoordinaatistossa

*Kun käyränä on $r = r(\varphi)$, niin kaaren AB pituudelle ja sektorimaisen alueen AOB pinta-alalle saadaan laskukaavat seuraavasti (vrt. kuva):

Kohdassa φ r:llä on tietty arvo r(φ). Kun φ saa (äärettömän pienen) lisäyksen dφ, niin pinta-ala saa sektorimaisen lisäyksen *dA* ja kaari lisäyksen *ds*.




Pinta-alaa laskettaessa sektori *dA* voidaan korvata ympyränsektorilla, jonka säde on *r*(φ) ja kaari $b = r(\varphi) \cdot d\varphi$ (rad. määr.). Sektorin ala on siten

$$dA = \tfrac{1}{2} b \cdot r(\varphi) = \tfrac{1}{2} r(\varphi)^2 \, d\varphi \, .$$

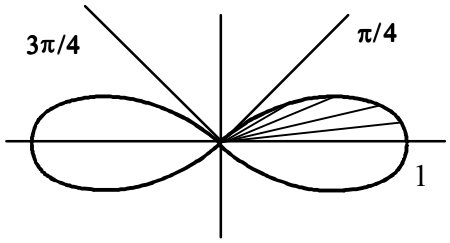
Kun kulman lisäys *d*φ on (äärettömän) pieni, niin jäljelle jäävä sektorin osa on suorakulmainen kolmio (ts. *b* ja *ds* ovat likimain suoria). Pythagoraan lauseen mukaan

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{b^2 + (dr)^2} \quad \Big| \quad b = r(\varphi) \cdot d\varphi, \quad dr = r'(\varphi)\, d\varphi \quad \text{(diff.)} \\ &= \sqrt{r(\varphi)^2 (d\varphi)^2 + r'(\varphi)^2 (d\varphi)^2} \\ &= \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} \; d\varphi. \end{aligned}$$

Kun *dA*:n ja *ds*:n lausekkeet "summataan" $\varphi_1$:stä $\varphi_2$:een, saadaan tulokset

$$A = \tfrac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi)^2 \, d\varphi, \qquad s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} \, d\varphi$$

***Esim. 9** Laske edellisen esimerkin mukaisen käyrän $r = \cos 2\varphi$ rajoittaman alueen ala ja käyrän pituus.




Neljäsosa käyrästä ja alasta saadaan kun φ muuttuu 0...π/4. Siten

$$A = 4 \cdot \tfrac{1}{2}\int_o^{\pi/4} (\cos 2\varphi)^2 \, d\varphi \quad \Big| \quad \begin{array}{l} \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \\ \therefore \cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) \end{array}$$

$$= 2\int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}(1+\cos 4\varphi)\, d\varphi = \Big|_0^{\pi/4} (\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{4}) = \frac{\pi}{4}.$$

$$s = 4 \cdot \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos^2 2\varphi + 4\sin^2 2\varphi} \, d\varphi \approx 4{,}844.$$

## HARJOITUKSIA

### A

**9.1** Paraabelista $y = 4 - x^2$ jää *x*-akselin yläpuolelle osa. Laske tämän kaaren painopiste.

**9.2** Laske käyrän $y^2 + \sin y + \cos x = 0$ tangentin kulmakerroin käyrällä olevassa pisteessä $(\pi/2, 0)$.

**9.3** Laske $\dfrac{dy}{dx}$ ja $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, kun $\begin{cases} x = 2t^3 \\ y = 3t^2 \end{cases}$.

**9.4** Laske sykloidin yhden kaaren ja *x*-akselin välisen alueen pinta-ala.

**9.5** Määritä ellipsin kaarevuussäde pisteessä (*a*,0). Ohje: käytä ellipsin parametriesitystä.

**9.6** a) Piirrä logaritminen spiraali $r = e^{\varphi}$ välillä $-\pi ... \pi/2$. b) Laske sen alueen ala, jota rajoittaa tämä kaari ja positiiviset *x*- ja *y*-akselit (φ muuttuu siis $0 ... \pi/2$).

**9.7** Laske spiraalin $r = 2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi$ pituus.

**9.8** Piirrä käyrä $r = \sin 2\varphi$ ja laske sen rajoittaman kuvion ala.

## B

**9.9** Laske käyrän $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}, 0 \le x \le 1$ painopisteen y-koordinaatti.

**9.10** Käyrälle $x^2y - 2y^3 + 2 = 0$ piirretään tangentti ja normaali pisteesseen $(3,-2)$. Määritä näiden yhtälöt.

**9.11** Piirrä ellipsi $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}$ ja laske $\frac{d^2y}{dx^2}$ t:n arvoa $3\pi/4$ vastaavassa pisteessä.

**9.12** Onko käyrä $\begin{cases} x = 4\cos t + 2\cos 2t \\ y = 4\sin t - 2\sin 2t \end{cases}$ positiivisen- vai negatiivisen $y$-akselin suuntaan kupera kohdassa $t = \pi/2$?

**9.13** Laske sykloidin yhden kaaren pituus. (Ohje tarkan arvon laskemiseksi: $1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2}$, sillä $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$.)

**9.14** Määritä käyrän $y = \ln x$ pisteeseen $(1,0)$ piirretyn kaarevuusympyrän yhtälö.

**9.15** Määritä käyrän $y = \frac{1}{x+1} + 2$ pisteeseen $P(0,3)$ piirretyn kaarevuusympyrän yhtälö. (Säteen saat myös laskemalla keskipisteen O ja pisteen P välisen etäisyyden.)

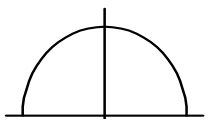
**9.16** Laske spiraalin $r = e^{2\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$ pituus.

**9.17** Piirrä käyrä $r = \cos 3\varphi$ ja laske sen rajoittaman kuvion ala.

**9.18** Piirrä käyrä $r = \sin 3\varphi$ ja laske sen rajoittaman kuvion ala.

## C

**9.19** Laske $r$-säteisen puoliympyränkaaren painopiste (kuva).



**9.20** Osoita, että ellipsin $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pisteeseen $(x_o, y_o)$ piirretyn tangentin yhtälö on $\frac{x_o x}{a^2} + \frac{y_o y}{b^2} = 1$.

**9.21** Osoita (eliminoimalla parametri $t$), että $\begin{cases} x = t + \frac{1}{t} \\ y = t - \frac{1}{t} \end{cases}$ on erään hyperbelin eräs parametriesitys. Laske tämän hyperbelin tangentin kulmakerroin pisteessä $(2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$.

**9.22** Jana, jonka pituus on $a$, liikkuu niin, että sen päätepisteet ovat koordinaattiakseleilla (piirrä kuva, jossa näkyy tällainen jana useassa eri asemassa). Tällaisen janaparven "uloimmista" pisteistä muodostuu kyseisen parven ***verhokäyrä***, joka on tässä tapauksessa ns. ***asteroidi***. Asteroidille voidaan johtaa parametriyhtälöt

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}.$$

a) Määritä asteroidin tangentti kohdassa $t = \pi / 6$. b) Laske tämän tangentin leikkauspisteet A ja B koordinaatiakselien kanssa. c) Laske janan AB pituus (joksi pitäisi tulla $a$).

**9.23** Kun $r$-säteinen ympyrä vierii origokeskisen $R$-säteisen ympyrän sisällä, vierivän ympyrän piste P (joka on alussa $x$-akselin ja $R$-säteisen ympyrän leikkauspiste) piirtää ns. ***hyposykloidin***, jonka yhtälöt ovat (vrt. kaavasto)

$$\begin{cases} x = (R-r)\cos t + r\cos\frac{R-r}{r}t \\ y = (R-r)\sin t - r\sin\frac{R-r}{r}t \end{cases}$$

a) Piirrä havainnollistava kuva (esim. $r = 2\ cm$, $R = 6\ cm$).

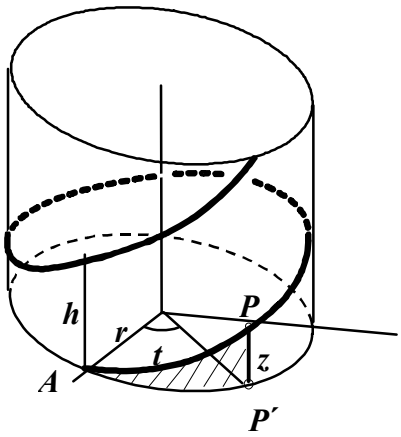
b) Osoita, että jos $R = 2r$, piste P liikkuu pitkin $x$-akselia. Tässä tapauksessa vierivän ympyrän halkaisijan PQ piste Q liikkuu pitkin $y$-akselia (symmetrian vuoksi). Siis janan liike niin, että janan päätepisteet pysyvät akseleilla, voidaan saada aikaan pyörimisliikkeen avulla. (Olisiko tällä ***kinemaattisen geometrian*** tiedolla käyttöä tekniikassa?)

c) Osoita, että jos $R = 4r$, hyposykloidista tulee asteroidi (edellinen harj.).

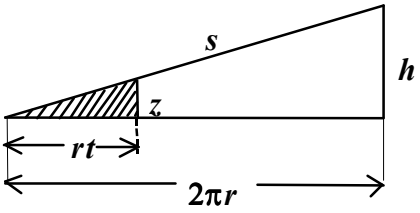
**9.24** Laske asteroidin kaaren pituus ja sen rajoittaman pinnan ala.

**9.25** ***Avaruuskäyrän*** $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ ***pituudeksi*** saadaan vastaavasti kuin tasokäyrällä lauseke $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, dt$. Laske sovelluksena ***ruuviviivan***

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = \frac{h}{2\pi} t \end{cases}$$




yhden kierroksen pituus. (Se saataisiin alkeellisesti alla olevasta kuvasta.)




**9.26** Missä pisteessä käyrän $y = \ln x$ kaarevuus on (itseisarvoltaan) suurimmillaan?

**9.27** Määritä perusparaabelin evoluutta.

**9.28** Määritä sykloidin evoluutta.

**9.29** Käyrä $r = r(\varphi)$ saadaan parametrimuotoon seuraavasti:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \overset{r=r(\varphi)}{\Rightarrow} \begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases} \text{(φ parametrina).}$$

Laske tämän tiedon avulla Arkhimedeen spiraalin $r = k\varphi$ kaarevuussäde ja kaarevuuskeskipiste (jälkimmäinen lasku on työläs).

**9.30** ***Kardioidi*** on eräs ns.episykloidin erikoistapaus. Se syntyy, kun $a$-säteinen ympyrä vierii samankokoisen ympyrän ulkopuolella. a) Hahmottele tämän perusteella kardioidin kuva. Jos kardioidin kärki siirretään origoon, yhtälö voidaan esittää napakoordinaatistossa muodossa $r = a(1 - \cos\varphi)$. b) Laske kardioidin rajoittaman alueen ala.

c) Laske kardioidin kaarenpituus. (Ohje: $1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$).

# *10 Integraalin derivointi parametrin suhteen

## 10.1 Parametri integroimisrajoissa

Integraalin $\int f(x)\,dx$ arvo on parvi $x$:n funktioita: $F(x)+C$. Jos nämä funktiot derivoidaan integroimismuuttujan $x$ suhteen, saadaan alkuperäinen funktio $f(x)$, ts.

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x).$$

Tämä tulos ilmaisee integroinnin ja derivoinnin käänteisyyden toisiinsa nähden.

Jos määrätyn integraalin $\int_a^b f(x)\,dx$ rajat ovat vakioita, niin

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)\,dx = 0 \qquad \text{(sillä vakion derivaatta = 0).}$$

Jos sensijaan esim. ylärajan $b$ tilalla on jokin parametri $t$, koko määrätyn integraalin arvo on $t$:n funktio ja tästä voidaan laskea derivaatta $t$:n suhteen:

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)\,dx} = \frac{d}{dt}\Big|_a^t F(x) = \frac{d}{dt}[F(t)-F(a)] = F'(t)-0 = \boldsymbol{f(t)}.$$

Tulos: *Jos integraalin ylärajana on parametri t ja alaraja on vakio, niin integraalin derivaatta t:n suhteen saadaan, kun yläraja sijoitetaan integroitavaan funktioon integroimismuuttujan tilalle.*

**Esim. 1** $D_t\int_1^t \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\sin t}{t}$. (Tätä integraalia ei pystytä laskemaan tavalliseen tapaan, mutta sen derivaatta pystytään siis laskemaan.)

*Jos $b$:n tilalla on $t$:n funktio $b(t)$, niin yhdistetyn funktion derivoimissäännön (ketjusäännön) nojalla

$$\frac{d}{dt}\int_a^{b(t)} f(x)\,dx = \frac{d}{dt}\Big|_a^{b(t)} F(x) = \frac{d}{dt}[F(b(t)-F(a)] = F'(b(t))\cdot b'(t).$$

**Esim. 2** $D_t\int_1^{3t} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\sin 3t}{3t}\cdot 3 = \frac{\sin 3t}{t}$.

## 10.2 Parametri integroitavassa funktiossa

Parametri $t$ voi olla myös integroitavassa funktiossa $f$, joka on tällöin itse asiassa kahden muuttujan $x$ ja $t$ funktio $f(x, t)$, ja integraali on muotoa

$$\int_a^b f(x,t)\,dx\,.$$

Koska integraalia laskettaessa integroimisrajat sijoitetaan $x$:n paikalle integraalifunktioon $F(x,t)$, tämän integraalin arvo on pelkästään $t$:n funktio ja voidaan kysyä sen derivaattaa $t$:n suhteen:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx = ?$$

Jos integraali ajatellaan "summaksi", seuraava tulos ilmaisee sen, että tämä "summa" voidaan derivoida termi termiltä:

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dt}\,.$$

Yhtälön oikealla puolella derivoitava funktio on kahden muuttujan funktio, joten kyseessä on osittaisderivaatan laskeminen $t$:n suhteen. Tätä tulosta (jota ei perustella tarkemmin), sanotaan myös ***integroinnin ja derivoinnin vaihtolauseeksi***, sillä vasemmalla puolella funktio integroidaan ensin ja derivoidaan senjälkeen ja oikealla puolella tehdään päinvastoin. Seuraava esimerkki vaatii tällaisen vaihdon, sillä funktio $\frac{\sin tx}{x}$ ei integroidu $x$:n suhteen tavallisessa mielessä.

**Esim. 3** $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_1^2 \frac{\sin tx}{x}\,dx = \int_1^2 \frac{\partial}{\partial t}\frac{\sin tx}{x}\,dx = \int_1^2 \frac{\cos tx \cdot x}{x}\,dx$

$$= \int_1^2 \cos tx\,dx = \Big|_1^2 \frac{\sin tx}{t} = \frac{1}{t}(\sin 2t - \sin t).$$

Huomaa, että derivoinnissa $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\sin tx}{x}$ on $x$ vakio, kun taas integraalissa $\int_1^2 \sin tx\,dx$ on $t$ vakio.

## HARJOITUKSIA

### A

**10.1** Derivoi a) $\int_0^t \sin^2 \omega \, d\omega$, b) $\int_0^{t^3} \cos(x^2+1)\, dx$.

**10.2** Laske $\dfrac{d}{dt}\int_0^2 (tx + t^2)\, dx$ kahdella eri tavalla:

a) merkityssä järjestyksessä, ts. suorittamalla ensin integrointi ja sitten derivointi,

b) vaihtamalla ensin derivoinnin ja integroinnin järjestys.

Kummastakin pitäisi tulla sama tulos.

### B

**10.3** Miten derivoidaan integraali $\int_a^b f(x)\, dx$ $t$:n suhteen, jos alarajan $a$ tilalla on a) $t$, b) $t$:n funktio $a(t)$.

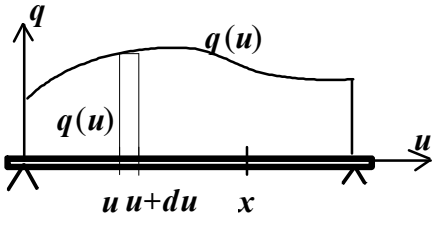
**10.4** Derivoi a) $\int_1^2 x \ln(x^2+t)\, dx$, b) $\int_2^3 \dfrac{e^{tx}}{x}\, dx$ .

### C

**10.5** Johda laskukaava derivaatalle $\dfrac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x)\, dx$ .

**10.6** a) $\dfrac{d}{dt}\int_1^3 \dfrac{\cos \omega t}{\omega}\, d\omega$, b) $\dfrac{d}{d\omega}\int_1^3 \dfrac{\cos \omega t}{\omega}\, dt$ .

**10.7** Taivutusmomentti kohdassa $x$ on (kuva)




$$M_x = Ax - \int_0^x (x-u)q(u)\, du$$

$$= Ax - x\int_0^x q(u)\, du + \int_0^x uq(u)du.$$

Laske $M_x''$.

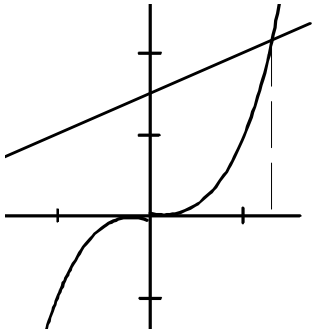
# 11 Numeerisia menetelmiä

## 11.1 Haarukointi ja iterointi (kertaus)

**Esim. 1** Määritä yhtälön $2x^3 - x - 3 = 0$ reaalijuuret. Mahdolliset rationaalijuuret ovat muotoa *p*/*q*, missä *p* on 3:n tekijä ($\pm 1$ tai $\pm 3$) ja *q* on 2:n posit. tekijä (1 tai 2). Täten kokeiltaviksi luvuiksi jäävät $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm 3, \pm\frac{3}{2}$. Mikään näistä ei toteuta yhtälöä, joten yhtälöllä ei ole rationaalijuuria.

Kirjoitetaan yhtälö muotoon

(1) $\qquad x^3 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$



ja piirretään käyrät $y = x^3$ ja $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. Kuvan mukaan yhtälöllä (1) on vain yksi reaalijuuri $x \approx 1{,}3$ (sillä tämä *x* antaa kummallekin *y*:lle saman arvon eli toteuttaa yhtälön (1)). Tarkennetaan tätä likiarvoa ***haarukoimalla*** (ks. seuraava taulukko):

| $x$ | $2x^3 - x - 3$ |
|---|---|
| 1,2 | – (0,744) |
| 1,4 | + (1,088) |
| 1,3 | + (0,094, siis lähes 0) |
| 1,28 | – (0,085...) |
| 1,29 | + (0,003...) ← |
| 1,289 | – (0,0005...) |
| 1,2895 | – ← |

Esim. kohdassa 1,3 lausekkeen $2x^3 - x - 3$ likiarvo on paljon lähempänä 0:aa kuin kohdassa 1,2. Siksi seuraavaksi arvaukseksi on valittu 1,28 (eikä 1,25).

Taulukon mukaan

$$1{,}289|5 < x < 1{,}2900,$$

joten katkaisussa 3. desimaali 9 korottuu. $\therefore$ $\underline{x \approx 1{,}290}$.

**Esim. 2** Sama ***iteroimalla***. Ratkaistaan yhtälöstä "yksi *x* erilleen", esim.

$x = \sqrt[3]{(x+3)/2}$ $\quad\therefore$ iterointi-*algoritmi* on $x_{n+1} = \sqrt[3]{(x_n+3)/2}$.

$x_1 = 1{,}3;\ \ x_2 = 1{,}1290..., x_3 = 1{,}2897...,\ \ x_4 = 1{,}28963....,$

$x_5 = 1{,}289624..., x_6 = 1{,}289624...$ $\quad\therefore\quad$ $\underline{\underline{x \approx 1{,}28962}}$.

## 11.2 Newtonin menetelmä (tangenttimenetelmä)

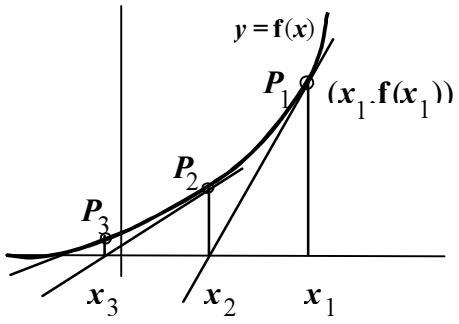
Edellisten esimerkkien yhtälö on muotoa $f(x)=0$, missä $f(x)$ on polynomifunktiona jatkuva. Haarukointi on tällaisille funktioille varma menetelmä juuren likiarvon $x_1$ parantamiseksi, koska siinä "haarukointiväli" pienenee joka askeleella vähintään puoleen.

Iterointi sen sijaan ei toimi aina, sillä $x_n$-arvot eivät aina lähene $n$:n kasvaessa mitään äärellistä raja-arvoa, ts. jono $x_1, x_2, \ldots$ voi hajaantua. Silloin kun iterointi toimii, se toimii yleensä nopeasti, ts. muutamalla askeleella saadaan jo hyvä likiarvo. Sama koskee seuraavaa *Newtonin menetelmää*.

Olkoon $x_1$ yhtälön $f(x)=0$ reaalijuuren likiarvo (joka on saatu esim. graafisesti tai teknillisissä tehtävissä tunnetaan usein asiayhteydestä).

Käyrän $y=f(x)$ pisteeseen $(x_1, f(x_1))$ piirretyn tangentin yhtälö on

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1).$$




Lasketaan tämän leikkauspiste $(x_2, 0)$ x-akselin kanssa:

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

$$-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_2 - x_1 \quad \therefore x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Otetaan $x_2$ uudeksi lähtöarvoksi, jolloin saadaan vastaavasti

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

Jatkamalla samaan tapaan saadaan ***Newtonin algoritmiksi***

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}.$$

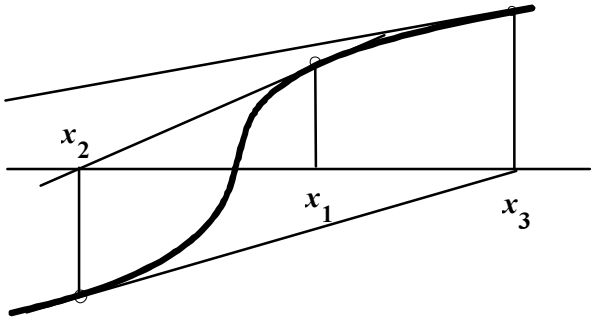
**Esim. 3** Tarkastellaan samaa yhtälöä kuin edellä. Silloin

$$f(x) = 2x^3 - x - 3, \quad f'(x) = 6x^2 - 1 \quad \therefore x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n{}^3 - x_n - 3}{6x_n{}^2 - 1}.$$

Tästä saadaan peräkkäin $x$:n likiarvoiksi

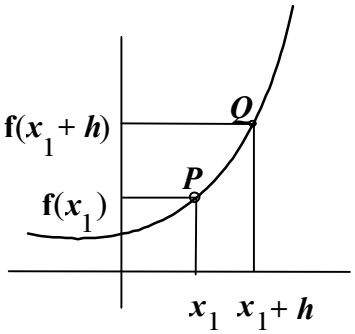
$$1{,}3, \quad 1{,}28971\ldots \; 1{,}28962390\ldots, \; 1{,}289623901\ldots \; \therefore x \approx 1{,}2896239.$$

Seuraava kuva havainnollistaa sellaista tilannetta, jossa $x$:n arvot lähtevät hajaantumaan ja Newtonin menetelmä ei siksi toimi.




## 11.3 Numeerinen derivointi

Numeerinen derivointi eli derivaatan likiarvon laskeminen perustuu yksinkertaisimmillaan derivaatan määritelmään. Sen mukaan



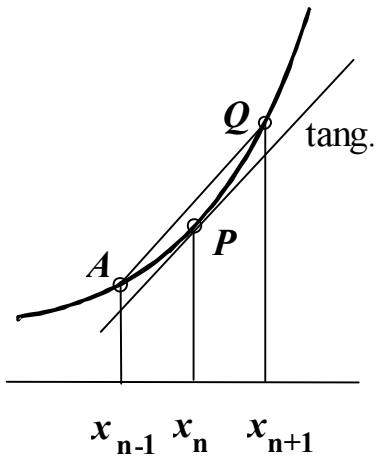

$$(2) \qquad f'(x_1) \approx \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}, \text{ jos } h \approx 0.$$

Geometrisesti tämä merkitsee, että pisteeseen P piirretyn tangentin kulmakertoimen tilalla käytetään sekantin PQ kulmakerrointa (vrt. kuva). Jos merkitään $x$:n "lisättyä" arvoa $x_2$:lla, ts. $x_1 + h = x_2 \quad \therefore h = x_2 - x_1$, niin (2) voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$f'(x_1) \approx \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, \text{ jos } x_2 - x_1 \approx 0.$$

eli muotoon

$$f'(x_1) \approx \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \text{ jos } x_2 - x_1 \approx 0.$$




Derivaatalle eli pisteeseen P piirretyn tangentin kulmakertoimelle saadaan ehkä parempi likiarvo, jos sekantin PQ kulmakertoimen sijalla käytetään sekantin AQ kulmakerrointa (vrt. kuva). Tällöin

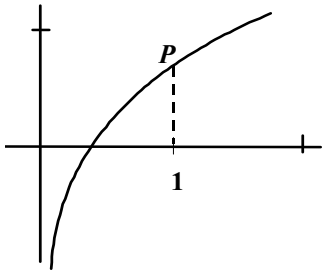
$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_{n+1})-f(x_{n-1})}{x_{n+1}-x_{n-1}}.$$

Jos $x_n = x, \quad x_{n+1} = x + h, \quad x_{n-1} = x - h$, niin tämä tulos saa muodon

(3) $$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Eräs mahdollisuus olisi myös käyttää sekanttien AP ja PQ kulmakertoimien keskiarvoa.

**Esim. 4** Jos $f(x) = \ln(x + \sqrt{x})$, ja $h = 0{,}01$, niin




$$f'(1) \approx \frac{\ln(1{,}01 + \sqrt{1{,}01}) - \ln(1 + \sqrt{1})}{0{,}01} = 0{,}746...$$

Jos käytetään kohdan $x = 1$ kummallakin puolella olevia kohtia $x + h = 1{,}01$ ja $x - h = 0{,}99$, saadaan parempi likiarvo

$$f'(1) \approx \frac{\ln(1{,}01 + \sqrt{1{,}01}) - \ln(0{,}99 + \sqrt{0{,}99})}{0{,}02} = 0{,}750021...$$

Tarkka derivaatan arvo on $0{,}75$.

*Numeeriseen derivointiin joudutaan tyytymään mm. silloin, kun funktion analyyttistä lauseketta ei ole tiedossa, vaan funktio tunnetaan esim. piirturin piirtämänä käyränä tai parien $(x_i, y_i)$ muodostamana taulukkona (datatietoina).*

Toinen derivaatta $f''(x)$ on ensimmäisen derivaatan $f'(x)$ derivaatta. Jos käytetään (2):ta vastaavaa ajattelutapaa, niin

$$f''(x) \approx \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \approx \frac{\dfrac{f(x+h+h) - f(x+h)}{h} - \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}}{h}.$$

Tämä sievenee muotoon

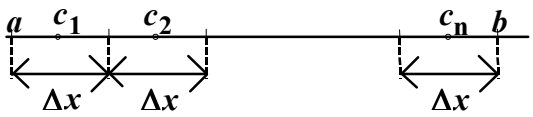
$$f''(x) \approx \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}.$$

*Minkä muodon saat, jos käytät (3):a vastaavaa ajattelutapaa?

## 11.4 Numeerinen integrointi suorakulmiomenetelmällä

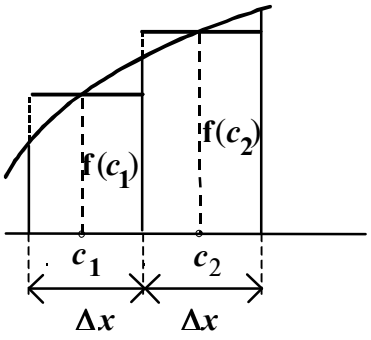
Integraalin likiarvon laskemiseen on tähän saakka käytetty integraalin määritelmän antamaa tulosta

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f(c_1)\Delta x + \cdots + f(c_n)\Delta x,$$




missä $c_i$:t ovat $\Delta x$-osavälien keskipisteitä.

Menetelmää sanotaan ***suorakulmiomenetelmäksi***, koska siinä erikoistapauksessa, että $f(c_i) > 0$, edellisen summan termi $f(c_i)\Delta x$ antaa $\Delta x$-kantaisen ja $f(c_i)$:n korkuisen suorakulmion alan (vrt. kuva). Tässä tapauksessa siis integraalin laskeminen korvataan suorakulmioiden alojen summaamisella.




Tällä erikoistapauksella voidaan myös perustella sitä, että jos $f(x)$ muuttuu aika lineaarisesti osaväleillä, niin edellinen kaava antaa aika hyvän likiarvon integraalille. Tällöin nimittäin kunkin suorakulmion ala on aika hyvin samansuuruinen kuin vastaava käyrän ja $x$-akselin välinen ala.

Suorakulmiomenetelmässä käyrän tilalla käytetään kullakin osavälillä vaakaviivaa, ts. vakiofunktiota eli 0:nnen asteen polynomia. Koko käyrä korvataan siis *porrasfunktiolla*, joten menetelmää voitaisiin sanoa myös porrasmenetelmäksi.

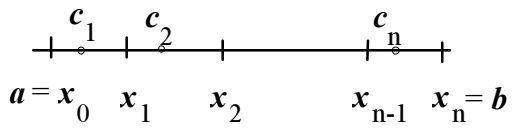
Yhden osavälin pituutta $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ merkitään yleensä $h$:lla, jolloin tulos voidaan esittää muodossa

(4) $$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f(c_i)}, \text{ missä } \boldsymbol{h = \frac{b-a}{n}}.$$

*Mieti miten tekisit tästä tietokoneohjelman (Basicillä, Pascalilla tms). Käytä apuna tietoja $c_1 = a + h/2$ ja $c_{i+1} = c_i + h$.

*Osavälien ei tarvitse suorakulmiomenetelmässä olla yhtä pitkiä eikä pisteiden $c_i$ osavälien keskipisteitä, vaan tämä likiarvomenetelmä voidaan esittää yleisemmin seuraavasti:

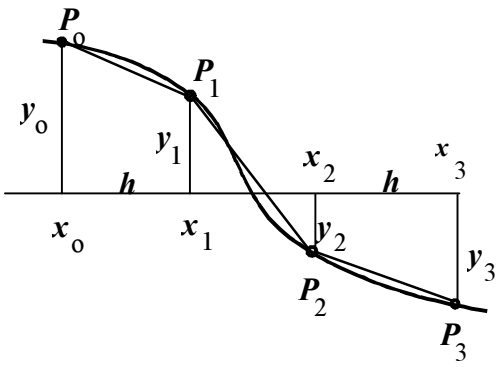
Jaetaan integroimisväli [$a$, $b$] osaväleihin, joiden pituudet ovat $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \ldots \Delta_n x$, ja kultakin osaväliltä valitaan yksi $x$:n arvo. Merkitään $i$:nneltä väliltä valittua $x$:n arvoa $c_i$:llä $(i = 1,2,\ldots,n)$. Silloin




$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta_i x. \tag{5}$$

## 11.5 Puolisuunnikasmenetelmä

*Puolisuunnikasmenetelmässä* käyrä korvataan pisteiden $P_o, P_1, \ldots$ kautta kulkevalla murtoviivalla, ts. kullakin osavälillä käyrän tilalla käytetään 1. asteen polynomifunktiota.




Jos erityisesti $f(x) > 0$, suorakulmioiden tilalle tulee "pystyssä olevia" puolisuunnikkaita. Esim. ensimmäisen puolisuunnikkaan ala saadaan, kun "kantasivujen" $y_1$ *ja* $y_2$ keskiarvo kerrotaan puolisuunnikkaan korkeudella $h$. Koko integraalin likiarvo on siten summa

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{y_o + y_1}{2}\cdot h + \frac{y_1 + y_2}{2}\cdot h + \frac{y_2 + y_3}{2}\cdot h + \cdots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\cdot h. \tag{6}$$

*Puolisuunnikasmenetelmässä siis osaväliltä lasketun arvon $f(c_i)$ tilalle kaavoissa (4) ja (5) tulee välin päätepistearvojen keskiarvo* $\frac{y_{i-1}+y_i}{2}$. (Tämä pitää paikkansa vaikka $y_i$:t eivät olisi positiivisia tai jako ei olisi tasavälinen.) Tulos (6) sievenee muotoon

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx h\cdot\left(\frac{y_o}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)}, \quad \text{missä} \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

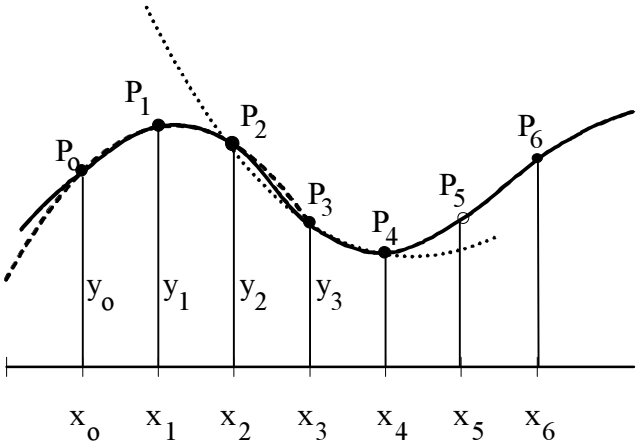
*Puolisuunnikassääntöä (*Trapezoidal Rule*) on helppo käyttää, koska siinä ei tarvita funktion arvoja muuta kuin osavälien päätepisteissä. Esimerkiksi edellisen kuvan mukaisella funktiolla sääntö antaa hyvän likiarvon, sillä ensimmäinen termi summassa (6) (ensimmäisen puolisuunnikkaan ala) on jonkin verran liian pieni, toinen on suunnilleen oikeankokoinen ja kolmas termi jonkin verran liian suuri (liian vähän negatiivinen).

## 11.6 Simpsonin sääntö

Puolisuunnikassäännössä korvattiin käyrän kahta peräkkäistä pistettä vastaavat käyränosat $P_oP_1$, $P_1P_2$, $P_2P_3$,... suorilla. ***Simpsonin säännössä*** korvataan kolmea peräkkäistä pistettä vastaavat käyränosat $P_oP_1P_2$, $P_2P_3P_4$,. $P_4P_5P_6$,... *paraabelin* kaarilla, mikä antaa yleensä paremman likiarvon (*approksimaation*), vrt. seuraava kuva Osavälejä tarvitaan tällöin parillinen määrä (muuten viimeiseen osaan täytyy soveltaa esim. puolisuunnikassääntöä).

Jaetaan siis väli [*a*, *b*] ***parilliseen*** määrään osavälejä, joiden pituudet ovat

$$\boldsymbol{h = \frac{b-a}{n}}.$$




Korvataan kolmea ensimmäistä pistettä $P_oP_1P_2$ vastaava käyränosa näiden pisteiden kautta kulkevalla paraabelinkaarella

$$y = ax^2 + bx + c\,.$$

Paraabelin kertoimet saadaan pisteiden $P_oP_1P_2$ koordinaattien perusteella.

Kun vastaavan integraalinosan $I_{02} = \int_{x_o}^{x_2} f(x)\,dx$ likiarvona käytetään paraabelin antamaa integraalia $I_{02} \approx \int_{x_o}^{x_2} (ax^2 + bx + c)\,dx$, niin lopputulos on (kuten voidaan todistaa)

(7) $$I_{02} \approx \tfrac{h}{3}(y_o + 4y_1 + y_2)$$

Vastaavasti $$I_{24} \approx \tfrac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$I_{46} \approx \tfrac{h}{3}(y_4 + 4y_5 + y_6)$$

$$\vdots$$

Kun nämä lasketaan yhteen, koko integraalille saadaan likiarvo

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx \approx \tfrac{h}{3}\cdot(y_o + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n)},$$

missä osavälien lukumäärä ***n* on parillinen** ja $\boldsymbol{h = \frac{b-a}{n}}$.

**Esim. 5** Laske käyrän $y = \sin 2x$ kaaren pituus yhden jakson väliltä.

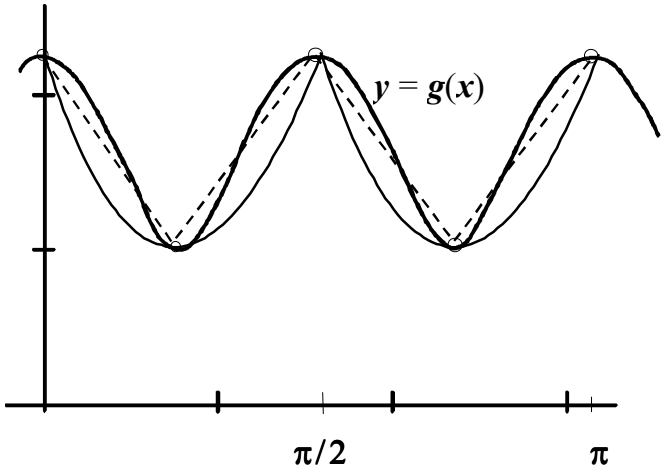
Jakson pituus on $2\pi / 2 = \pi$, joten yksi jaksoväli on esim. $[0, \pi]$.

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_0^{\pi} \underbrace{\sqrt{1 + 4\cos^2 2x}}_{g(x)}\, dx$$

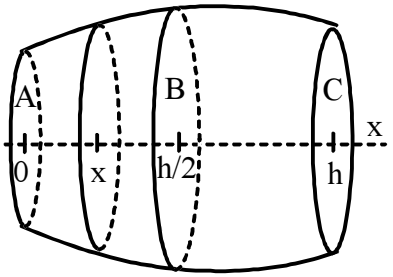
Simpson, 4 osaväliä
$\therefore h = \pi / 4$

$$\approx \frac{\pi / 4}{3}[g(0) + 4 \cdot g(\pi/4) + 2 \cdot g(\pi/2) + 4 \cdot g(3\pi/4) + g(\pi)] \approx 4{,}436.$$

Vaikka yleensä *Simpsonin* menetelmä on aikaisempia menetelmiä tehokkaampi, tässä esimerkissä *Simpsonin* säännön antama likiarvo on huono, sillä oikea *s*:n arvo on $s = 5{,}270367...$ Puolisuunnikassääntö antaisi neljällä osavälillä paremman likiarvon 5,083... ja alkeellisin suorakulmiomenetelmä likiarvon 5,441... Käyrän $y = g(x)$ muoto on sellainen, että käyrän korvaaminen kahdella paraabelin kaarella onnistuu huonosti (vrt. seuraava kuva). Puolisuunnikassäännön mukainen murtoviiva sopii paraabeleja paremmin yhteen tämän käyrän kanssa.




**Esim. 6** Tynnyrin korkeus on *h*, pohjien alat ovat *A* ja *C* sekä poikkileikkausala keskellä on *B*. Johda tilavuudelle likiarvokaava *Simpsonin* säännöllä.




Jos poikkileikkaus kohdassa *x* on *A*(x), niin dx:n levyisen levyn tilavuus $dV = A(x)\, dx$ ja koko tilavuus on "summa"

$$V = \int_0^h A(x)\, dx \approx \frac{h/2}{3}[A(0) + 4A(h/2) + A(h)] = \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{6}}[\boldsymbol{A} + \boldsymbol{4B} + \boldsymbol{C}]$$

(*Simpson*, 2 osaväliä, pituudet *h*/2).

## HARJOITUKSIA

### A

**11.1** Ratkaise a) haarukoimalla, b) iteroimalla, c) *Newtonin* menetelmällä yhtälö $x^3 = x + 1$ neljän numeron tarkkuudella.

**11.2** Määritä *Newtonin* menetelmällä seuraavien yhtälöiden juuret kolmen desimaalin tarkkuudella:

a) $\sin x - x + 2 = 0$, b) $\ln x - x + 2 = 0$.

**11.3** Laske a) suorakulmio-, b) puolisuunnikas-, c) *Simpsonin* menetelmällä integraalin $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ likiarvo, käyttäen 4 osaväliä. Vertaa tuloksia tarkkaan arvoon.

### B

**11.4** Laske yhtälön $x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 12 = 0$ rationaalijuuri ja sitten tangenttimenetelmällä irrationaalijuuren 3-numeroinen likiarvo. (Poista rationaalijuurta vastaava tekijä ensin jakamalla.)

**11.5** Jatka esimerkkiä 4, laskemalla samalle funktiolle $f(x) = \ln(x + \sqrt{x})$ toisen derivaatan $f''(1)$ likiarvon eri tavoilla ja vertaa tuloksia tarkkaan arvoon.

**11.6** Laske a) *Simpsonin* säännöllä, b) puolisuunnikassäännöllä integraalin $\int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx$ likiarvo. Käytä 4 osaväliä. (Tarkan arvon saisit kahdella osittaisintegroinnilla.)

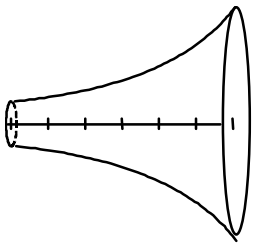
**11.7** Laske *Simpsonin* säännöllä $\int_1^2 \frac{\ln x}{x+1} \, dx$, 6 osaväliä. Huomaa: *kun osavälejä on 6, niin likiarvokaavassa on 7 termiä* (miksi?)

**11.8** Laske $\int_0^3 \sqrt{1+x^3} \, dx$ puolisuunnikassäännöllä, 6 osaväliä.

**11.9** Laske *Simpsonin* säännöllä, 8 osaväliä, $\int_4^8 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

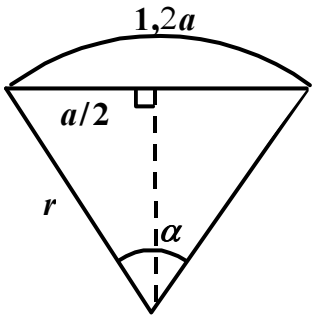
**11.10** Laske $\int_1^9 \frac{\sin x}{x}\,dx$ *Simpsonin* säännöllä, 4 osaväliä. (Laskin RAD-näytölle!)

**11.11** Viereisen kuvan tapaisen pyöräyskappaleen halkaisija mitattiin 10,0 *mm*:n välein ja tulokset olivat mm:issä 10,0 13,0 18,0 24,0 40,0 60,0 ja 90,0. Laske kappaleen tilavuus.



## C

**11.12** Ympyrän kaari $b$ on 20% jännettä $a$ pidempi. Laske keskuskulma. Ohje: käytä radiaanin määritelmää ja kulman $\alpha/2$ siniä. (Tämä ongelma tuli eteen teknikkotason lujuusopissa.)




**11.13** Tiedetään, että eräs kokeellinen käyrä on esim. polynomimuotoinen, joten se kaartuu "tasaisesti", ilman äkkimutkia. Oletetaan, että käyrältä tunnetaan lähekkäin olevat arvoparit

$$(x_{n-2}, y_{n-2}), (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1}), (x_{n+2}, y_{n+2}).$$

Johda toiselle derivaatalle $f''(x_n)$ likiarvokaava. Käytä apuna kaikkia viittä lähipistettä.

## Vastauksia

**1.1** $y = \ln|x| + 2$ **1.2** $y = -\frac{1}{2}(\cos 2x - 3)$ (eli $y = \sin^2 x + 1$)

**1.3** $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2\frac{1}{6}$, $y = -\ln|x| + 2x - 1$. **1.4** a) $y = Ce^{x^2/2}$,

b) $y = Ce^{\cos x}$ **1.5** a) $xy = 8$, b) $y = \dfrac{x}{x-1}$ **1.6** a) $y = Ce^{x^2/2}$,

b) $y = Ce^{\cos x}$ **1.7** $y = Ce^{\frac{3}{4}x^2}$ **1.8** a) $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$,

b) $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{2}e^{4x}$ **1.9** $y = \frac{1}{4}(e^{-2x} + \sin 2x - \cos 2x)$

**1.10** $y = -\ln|x| + x\ln 2 + 1 - \ln 2$ **1.11** $y = \frac{1}{4}e^{2x}(x-1) + C_1x + C_2$

**1.12** $s = s_o + v_o t - \frac{1}{2}gt^2$ **1.13** $y = \pm\sqrt{x^2 + 2x - 2}$, hyperbeli, kp. $(-1,0)$,

puoliakselit $\sqrt{3}$ **1.14** a) $y = Ce^{-2x^2}$, b) $y = \dfrac{1}{\ln|x| + C}$

**1.15** $y = Ce^{3x} - 2$ **1.16** $\dfrac{dT}{dt} = k(T - T_{ymp})$, $T = (50 - 40\cdot e^{kt})\ ^oC$

**1.17** $n.\ 49{,}4\ ^oC$ ($49{,}375\ ^oC$) **1.18** a) $y = Ce^x - \frac{1}{2}e^{-x}$

b) $y = e^{-x}(x + C)$ **1.19** $i = e^{-2t} + \frac{3}{4}(\sin 2t - \cos 2t)$

$(= e^{-2t} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\sin(2t - \pi/4))$ **1.20** $\frac{q}{2}(Lx - x^2)$,

$\frac{q}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$ **1.21** $y = \frac{q}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$,

$y_{\max} = \frac{qL^4}{8EI}$ **1.22** $0{,}990e^{-2t} + 0{,}00630\sin 100\pi t - 0{,}990\cos 100\pi t$

**1.23** a) 44%, b) klo 15.05, c) 9,5%

**1.24** $y = C\cos^2 x + \sin x\cos x - x\cos^2 x$ **1.25** $i = \frac{311}{700\pi}(1 - \cos 100\pi t)$.

**2.1** a) $y = e^{-8x}(C_1 + C_2x)$, b) $y = C_1\sin 2x + C_2\cos 2x$

c) $y = e^{-x}(C_1 + C_2x) + \frac{1}{9}e^{2x}$, **2.2** $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x} - xe^{-x})$

**2.3** a) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - \frac{1}{3}e^{-x}$, b) $y = C_1\sin x + C_2\cos x - \frac{1}{2}x\cos x$

**2.4** b) $s = \sqrt{2}\sin(t + \pi/4)$ **2.5** a) $s = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-5t}$, b) $s = e^{-3t}(1 + 4t)$

c) $s = e^{-t}(\sin 2t + \cos 2t)$ eli $s = \sqrt{2}e^{-t}\sin(2t + \pi/4)$

**2.6** a) $y = 2\sin 2x + 5\cos 2x + 2\sin x - \cos x$

b) $y = 3 - e^{-2x} - \sin 2x - \cos 2x$.

**2.8** a) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$, b) $y = C_1 + C_2e^{4x} + x^2 + \frac{1}{4}x$

c) $y = C_1 + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$.

**2.9** $y = \frac{1}{6}(e^{-x} - e^{-7x})$ **2.10** a) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - 1$, b) $y = e^{2x} - 1$.

**2.11** $y = 3e^x(x-1) + \frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$.

**2.12** $s = \frac{1}{2}\sin 2t + 3\frac{1}{2}\cos 2t + \sin t - \frac{1}{2}\cos t$.

**2.13** $s = e^{-3t}(C_1 + C_2 t) + 4e^{-2t}$ **2.14** $s = C_1 + C_2 e^{-2t} - \frac{5}{8}(\sin 2t + \cos 2t)$

**2.15** $s = 3 - e^{-2t} - \sin 2t - \cos 2t$.

**2.16** a) $y = C_1 \sin 3x + (C_2 - \frac{1}{3}x)\cos 3x$, b) $y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x + 3x^2)$.

**2.17** $s'' + \omega_o{}^2 s = 0$, $s'' + 2\delta s' + \omega_o{}^2 s = 0$, $s'' + 2\delta s' + \omega_o{}^2 s = K_o \sin \omega t$.

**2.18** $i = \frac{U}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$, $q = CU(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$ **2.19** $i = 5e^{-t}\sin 2t$

**2.20** a) $q = e^{-400t}(C_1 \sin 300t + C_2 \cos 300t) + 2{,}4 \cdot 10^{-3}$,

b) $i = 2e^{-400t}\sin 300t$ **2.21** $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x} - xe^x$

**2.22** $y = C_1 \ln x + x^3/9 + C_2$ **2.23** $r = 2 \pm \sqrt{3}$

**2.24** $y = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x} + x - 1$,

$z = C_1(-1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}x} + C_2(-1+\sqrt{2})e^{\sqrt{2}x} + x + \frac{1}{2}$.

**2.25** a) $v' + \frac{k}{m}v^r = g$, b) $v = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$, c) $v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{k}}$.

**2.26** a) $s = \frac{5m}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$, b) $s = 15(1 - e^{-\frac{t}{3}})$.

**3.1** $\pi/3, \pi/2, 0, -\pi/3, -5\pi/12, 0{,}644, ei, -3\pi/2$

**3.2** $\pi/6, 0, \pi/2, 5\pi/6, 17\pi/12, 0{,}927, ei, 4\pi$

**3.3** $\pi/3, -\pi/6,\ 1{,}107,\ \pi^2/12,\ 0{,}322$

**3.4** a) $-\dfrac{1}{\sqrt{x^4 - x^2}}\ (= -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}})$, b) $\dfrac{1}{\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2}}$,

c) $\dfrac{6}{\sqrt{1-9t^2}}$, d) $2x \arcsin x + \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

**3.5** a) $\dfrac{3}{1+9x^2}$, b) $\dfrac{1}{(2x+2)\sqrt{x}}$, c) $\dfrac{2e^{2x}}{e^{4x}+1}$.

**3.6** a) $\pi/6$, b) $-2\sqrt{1-x^2} + C$, c) $4\pi/3$, **3.7** a) $\pi/4$, b) $\frac{1}{2}\ln 2$,

c) $7\pi/12$ **3.8** $\pi/9$ **3.9** a) $\pi/18$, b) $\frac{1}{6}\ln\left|\dfrac{s-3}{s+3}\right| + C$,

c) $\ln\left|t + \sqrt{t^2-4}\right| + C$ **3.10** $\frac{1}{2}\arctan\frac{x+3}{2} + C$

**3.11.** $\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x}\right|+C$ **3.13.** a) $\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$, b) $\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$,

c) $\dfrac{2}{|x+1|\sqrt{x^2+2x-3}}$ **3.14** $\dfrac{1}{1+x^2}$ **3.16** $\dfrac{b-\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi-b}{4}$

**3.17** a) $\pi\sqrt{3}/6$, b) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\dfrac{2x+1}{\sqrt{2}}+C$, c) $\ln\dfrac{4+2\sqrt{3}}{3+\sqrt{5}}\approx 0{,}355$

**3.18** a) $2x-\arctan x+C$ b) $\sqrt{x^2-4}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+C$,

c) $\frac{1}{3}\ln(3x+\sqrt{1+9x^2})+C$

**3.19** $a)$ $\begin{cases} x_1=\arcsin a+n\cdot 2\pi \\ x_2=\pi-\arcsin a+n\cdot 2\pi \end{cases}$ $b)$ $\begin{cases} x_1=\pi+(-\arcsin a)+n\cdot 2\pi \\ x_2=2\pi-(-\arcsin a)+n\cdot 2\pi \end{cases}$.

Tämä sievenee niin, että b)-kohdan kaikki kulmat saadaan a)-kohdan ratkaisukaavoista (sillä kun n kulkee kaikki kokonaisluvut, samoin tekee n+1), vrt. kaavasto. **3.20** ks. kaavasto,

**3.21** $D\,\text{op}=$ integr. funktio **3.22** $\arccos x=\dfrac{\pi}{2}-\arctan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

**3.23** Käytä tulosta $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$ ja arkussinin parittomuutta.

**3.24** a) $x=\frac{1}{2}\sin(y+\frac{3\pi}{4})$, b) $\pi-2$, c) $\pi-4$, d) $6-2\pi$, e) $-\pi/3$

**3.25** a) $y=\frac{\pi}{2}-x$, b) $y=\frac{\pi}{2}+x-2\pi=x-\frac{3\pi}{2}$

**4.1** a) $1-\ln 2$, b) $-x-\ln|x-1|+C$, c) $x^2-x+\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$

**4.2** a) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\arctan x+C$, b) $1+\ln 2-\frac{\pi}{4}$

**4.3** a) $\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{2}{x}$, b) $\dfrac{1}{s-1}-\dfrac{1}{s+1}$ **4.4** a) $\ln\dfrac{(x+1)^2}{|x|}+C$,

b) $\ln\left|\dfrac{x-3}{2x-1}\right|+C$ **4.5** $\dfrac{3s-1}{s^2+s+1}-\dfrac{2}{s}$ **4.6** $3\ln 2-\ln 3-\frac{1}{6}$

**4.7** Huomaa, että a)-kohdan sulkulauseke on jaoton, b)-kohdan ei.

**4.8** a) $x+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{4}{3}\ln|x+2|+C$,

b) $3\ln|x+1|-\ln(x^2+9)-\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}+C$ **4.9** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$

**4.10** $-\dfrac{2}{s+1}+\dfrac{1}{(s+1)^2}+\dfrac{2s+1}{s^2+1}$ **4.11** a) $\frac{1}{2}(5\ln|x|+\ln|x+2|)+C$,

b) $\dfrac{1}{x}+\ln\frac{x^2}{x^2+4}+\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+C$ **4.12** a) $\dfrac{1}{x}+\ln\dfrac{(x-1)^2}{|x|}+C$, b) $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\ln 2}{2}$

**4.13** $\dfrac{\ln 2}{3}+\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}$ **4.14** $\ln|x-1|+\ln(x^2+x+2)-\dfrac{2}{\sqrt{7}}\arctan\dfrac{2x+1}{\sqrt{7}}+C$.

**4.15** a) Joko kaikki lineaarisia tai lineaarinen ja 2. asteen tekijä.
b) Lineaarisia tekijöitä on 0, 2 tai neljä, muut toisen asteen tekijöitä.

**5.1** a) $\frac{1}{6}(\sqrt{3}+1)$, b) 0 **5.2** a) $\frac{1}{4}\tan 4-1$, b) $\pi/2$

**5.3** a) 0, b) $\frac{1}{8}(2\cos 2x-\cos 4x)+C$ **5.4** 2/15 **5.5** a) $\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$,
b) $-1/\tan\frac{x}{2}+C$ **5.6** a) $\frac{1}{4}\sin 2t-\frac{1}{2}(t+1)\cos 2t+C$, b) 16/15

**5.7** a) $\ln 2$, b) $\sqrt{2}-\ln(\frac{3}{2}+\sqrt{2})$ **5.8** $(3\pi+3\omega-\sqrt{3})/(9\omega^2)$

**5.9** a) $1+\sqrt{3}$, b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}$ **5.10** a) sij. $\omega t=u$ ja palautuskaava,
b) $\frac{1}{2}\ln|\tan x|+\frac{1}{4}\tan^2 x+C$ **5.11** $\frac{\hat{u}\hat{\imath}}{2}T\cos\varphi$

**6.1** a) $\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$, b) $\frac{4}{15}(1+\sqrt{2})$, c) $\frac{\sqrt{2}}{5}x^2\sqrt{x}+C$

**6.2** a) $2\sqrt{x}-2\ln(\sqrt{x}+1)+C$, b) $\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-1}+C$, c)
$\sqrt{2x-1}+\ln\left|\sqrt{2x-1}-1\right|+C$ **6.3** a) $2+2\ln\frac{3}{4}$, b) $\pi/6$

**6.4** a) 1/3, b) $\pi/16$ **6.5** $81\pi/16$ **6.6** a) $\frac{1}{2}\sqrt{3}+\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, b) $\pi/4$,
c) $\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ **6.7** a) $2\sqrt{2}+2\ln(\sqrt{2}-1)$, b) $\ln\left|t+1+\sqrt{t^2+2t}\right|+C$.

**6.8** a) $-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{12})$ $(=-\frac{1}{2}\ln(2\sqrt{3}-3))$, b) $-\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{9x}+C$

**6.9** a) $-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{x}+C$, b) Vihje: $\displaystyle\int\frac{1}{\sin t\cos^2 t}dt=\int\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin t\cos^2 t}dt$
$\displaystyle=\int\cos^{-2}t\sin t\,dt+\int\frac{1}{\sin t}dt$, Vastaus: $2-\frac{1}{2}\ln 3-\ln\tan\frac{\pi}{8}$ eli
$2-\sqrt{2}-\frac{1}{2}\ln 3-\ln(\sqrt{2}-1)$ **6.10** $x\sqrt{\frac{1-x}{x}}-\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}+C$

**7.1** a) $\dfrac{e^3-1}{3e^3}$, b) $\dfrac{e^{\varphi t}(\varphi t-1)}{\varphi^2}+C$, c) $2\sqrt{2e^x}+C$

**7.2** a) $\displaystyle-\frac{e^{-t}}{\omega^2+1}(\sin\omega t+\omega\cos\omega t)+C$,
b) $e^x(x^4-4x^3+12x^2-24x+24)+C$

**7.3** $\frac{1}{16}x^4(4\ln x-1)+C$ **7.4** a) $x\cosh x-\sinh x+C$, b) $1-1/e$
$=\sinh 1-\cosh 1+1$, c) $\frac{1}{4}(\sinh 2x-2x)+C=\frac{1}{8}(e^{2x}-e^{-2x}-4x)+C$

**7.5** a) $a\tanh(ax+b)$, b) $\dfrac{-\cosh 2x}{\sinh^2 x\cosh^2 x}=\dfrac{-4}{\sinh 2x\tanh 2x}$

**7.7** a) $a\tanh x$, b) $\dfrac{-4\cosh 2x}{\sinh^2 2x}$

**7.8** a) $-e^{-x}(x^4+4x^3+12x^2+24x+24)+C$, b) $-e^{-x}(x^2+2x+2)+C$

**7.9** a) $\pi(e-2)$, b) $\frac{\pi}{2}(e^2+1)$ **7.10** $e^x-\ln(e^x+1)+C$

**7.11** a) $\frac{x^3}{9}(3\ln x-1)+C$, b) $\ln|\ln u|+C$

**7.13** $(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4})arsc\sin x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+C$

**7.14** $e^t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^t-1}{e^t+1}\right|+C$ **8.1** 4/3 **8.2** 335/27 **8.3** 3,71

**8.4** 3/2 **8.6** $\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$, joka on = keskinopeus tällä aikavälillä

**8.7** $2\sinh 1=e-1/e$ **8.8** a) $A=2\pi\int x\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$, b) $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$

**8.9** vrt. pallon tilavuuden laskukaavan johtaminen pyöräyskappaleen yhteydessä (I osa, s. 65) **8.10** $W=6\cdot(1/V_1^{0,5}-1/V_2^{0,5})$. Kyseessä on vain potenssin $V^{-1,5}$ integrointi, ei sen pahempi asia!

**8.11** 1/4 **8.12** $f_k$:llä on sellainen arvo, että suoran $y=f_k$ ja $x$-akselin väliin jää välille [$a$, $b$] yhtä suuri alue kuin käyrän $y=f(x)$ ja $x$-akselin väliin **8.13** $\hat{i}/\sqrt{2}$ **8.14** b) 3,35 m

**8.15** a) F(s) = a/s, b) $F(s)=1/s^2$, c) $F(s)=\frac{1}{s-a}$ (s > a).

**9.1** $(0;20,23/9,294)\approx(0;2,18)$ **9.2** 1 **9.3** $1/t\ ja\ -1/(6t^4)$ **9.4** $3\pi r^2$

**9.5** $b^2/a$ **9.6** $\frac{1}{4}(e^\pi-1)$ **9.7** $\pi\sqrt{1+\pi^2}+\ln(\pi+\sqrt{1+\pi^2})\approx 12,2$

**9.8** Kuten $r=\cos 2\varphi$, mutta $45^o$ kiertyneenä, $A=\pi/4$

**9.9** $y_p\approx\frac{0,3484}{1,219}\approx 0,286$ **9.10** $4x+5y=2$, $5x-4y=23$

**9.11** $-10\sqrt{2}/9$ **9.12** $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{4}>0$, siis negatiivisen y-akselin suuntaan kupera. **9.13** 8r **9.14** $x^2+y^2-6x+4y+5=0$

**9.15** $x^2+y^2-2x-8y+15=0$ **9.16** $\frac{\sqrt{5}}{2}(e^{4\pi}-1)$

**9.17** "kolmiapila", $A=\pi/4$ **9.18** "kolmiapila", $A=\pi/4$ **9.19** $(0,\frac{2}{\pi}r)$

**9.21** hyperbeli, jonka puoliakselit ovat 2 ja 2, $k=5/3$ **9.24** 6R, $\frac{3}{8}\pi R^2$

**9.25** $\sqrt{(2\pi r)^2+h^2}$ **9.26** $(1/\sqrt{2},-\frac{1}{2}\ln 2)$

**9.27** Parametrimuodossa $\begin{cases} a = -4x^3 \\ b = 3x^2 + \frac{1}{2} \end{cases}$ (parametrina $x$), ts. jos merkitään paraabelin pisteen P $x$-koordinaattia $t$:llä ja kaarevuuskeskipistettä $(x, y)$:llä, niin $\begin{cases} x = -4t^3 \\ y = 3t^2 + \frac{1}{2} \end{cases}$ **9.28** $\begin{cases} x = r(t + \sin t) \\ y = -r(1 - \cos t) \end{cases}$ (sekin on eräs sykloidi) **9.29** $\rho = \dfrac{k[1+\varphi^2]^{3/2}}{2+\varphi^2}$, $a = k\dfrac{\varphi\cos\varphi - \sin\varphi - \varphi^2\sin\varphi}{2+\varphi^2}$, $b = k\dfrac{\varphi\sin\varphi + \cos\varphi + \varphi^2\cos\varphi}{2+\varphi^2}$ (missä kulma φ on radiaaneissa. Näitä tuloksia tarvittiin jyrsimen ohjelmoinnissa.)

**9.30** a) "lumpeenlehti", b) $3\pi a^2/2$, c) 8a

**10.1** a) $\sin^2 t$, b) $3t^2\cos(t^6+1)$ **10.2** $2+4t$

**10.3** a) $-f(t)$, b) $-f(a(t))\cdot a'(t)$ **10.4** a) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{4+t}{1+t}\right|$, b) $\frac{1}{t}(e^{3t} - e^{2t})$

**10.5** $\dfrac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x)\,d(x) = f(b(t)\cdot b'(t) - f(a(t))\cdot a'(t)$

**10.6** a) $\frac{1}{t}(\cos 3t - \cos t)$, b) $\frac{1}{\omega^2}(3\cos 3\omega - \cos\omega) - \frac{2}{\omega^3}(\sin 3\omega - \sin\omega)$

**10.7** $-q(x)$ **11.1** 1,325 **11.2** a) 2,554 b) 0,159 ja 3,146

**11.3** tarkka arvo $\pi/4$ **11.4** 2 ja 1,63 **11.5** tarkka arvo $-11/16$

**11.6** a) –6,24 (tarkka arvo $-2\pi$) **11.7** 0,1472

**11.8** 7,395 (tarkempi arvo 7,3414...) **11.9** 0,292 (tarkempi arvo 0,29188...)

**11.10** 0,712 (tarkempi arvo 0,71895...) **11.11** $77{,}0\cdot 10^3\ mm^3$

**11.12** 2,053